欧姆社学习漫画

漫画物理之力学

〔日〕新田英雄/著
〔日〕Takatsu Keita/漫画绘制
〔日〕株式会社TREND-PRO/漫画制作
陈　芳/译



科学出版社
www.sciencep.com

✿前　言✿

为了学好物理这门课程，掌握正确的物理概念是必不可少的。特别是在力学的学习过程中，如果不明白物理定律的话，也就没法清楚物体的运动随时间如何变化。但是，以前的以大段文字叙述为中心的教材，很难十分清晰地表达出运动的某些概念。

本书利用了漫画的优点，尝试着打破以往教科书刻板的局限性。漫画不是插图的合集，而是一种灵活的表现方法。漫画能够灵活表现出运动随时间变化的情况。漫画能将枯燥无味的非现实的需要想象的力学现象和定律，转换成身边常见的现象。当然，漫画充满了乐趣,不然就不能称为漫画了。本书着重强调了这一点。这点尝试是否成功，还需读者朋友来评判，作为著者，由于篇幅原因，不得不删减了圆周运动和非惯性系的章节。

本书的主人公二宫田惠同学，是物理学得不好的高中生。认为自己物理学不好的读者，跟田惠一起学习，相信也能亲身体会学习力学基础知识的乐趣。

希望本书可以使“物理成绩不好”或“讨厌物理”的人，能慢慢对物理产生兴趣。

最后，对欧姆出版社的各位老师、负责情景设计的 re_akino 先生、制作精彩漫画的 Takatsu Keita 先生表示深深的感谢。另外，我还要强调一点，本书不是我一个人的作品，而是大家共同努力的结晶，在这里一并表示感谢。

新田英雄

✿本书的使用方法✿

本书适用范围广泛，从学不好物理的人到理工科的学生都可以阅读，为了便于不同的读者可以根据自己的水平进行学习，本书由“漫画部分”、“后续”、“提高”三个部分组成。

没有学过物理的人、学不好物理的人，可以先学习本书的漫画部分。即使有不懂的地方，也不用在意，肯定能在享受漫画的乐趣的同时学习物理知识。漫画学完了，就请看实验室的内容，再巩固一遍。虽然有数学公式出现，不过采用的都是中学的数学知识，仔细看的话，会慢慢地理解和明白。如果还是有不懂的地方，那么就先跳过。不断地阅读，会慢慢学习到物理的学习方法和思考方法。之后，结合自己的兴趣和理解，学习后续和提高里面的知识。还有，本书中学习的力学定律，可以结合自己身边的现象来研究。虽然还不知道答案，但是尝试从物理角度来考虑也是很重要的。

物理学得一般、想学高等物理的人，可以研究后续部分的内容。后续是漫画部分的补充解释。即使是中学生，如果喜欢物理的话，也是能够看懂的。如果其中出现了公式，请自己先计算证明一下。不要去死记公式，而应该是从基本定律推导出来，从而理解物理现象，这点是很关键的。

大学生、理工科出身的社会人士和喜欢物理学的高中生，请读提高部分的内容。这部分内容使用到了微积分知识，对漫画内容做了进一步补充说明。微积分是发现运动三大定律的牛顿发明的，是处理力学问题不可缺少的工具。而且，微积分将力学的许多定律中的难题很清楚地表示出来。不看本书的证明，能够从牛顿运动的三大定律推导出动量守恒定律、做功与动能的关系和能量守恒定律的话，就说明你的实力已经很强了。

✿目　录✿

第3章　动　　量　103

序章

对物理感兴趣了





ターーン
ターーン
哈!
嗨!
集中注意力……
集中注意力……


几小时前
物理考试怎么样？
我们刚好说到了。
喂喂，
第9题是什么来着？
第9题 想象一下网球拍击球的状况，球对球拍的力，与球拍对球的力的大小关系是怎样的呢？请从①～④中选出最合适的答案。
① 球拍对球的力大于球对球拍的力
② 球对球拍的力大于球拍对球的力
③ 球对球拍的力与球拍对球的力一样大
④ 球对球拍的力与球拍对球的力的大小关系，随着球拍的重量和球的速度变化而变化
我选择的是③。
我也是——
啊——
我可是选择的①
啊……


哎呀哎呀，
田惠……
连“作用力与反作用力定律”也忘了吗？
好了，好了！
啊，什么呀？早矢香。
呵呵
根据作用力与反作用力定律，球对球拍的作用力……
球对球拍的作用力
球拍对球的作用力
与球拍对球的作用力总是相等的。
哼哼……
因此答案是③！
啊——


先不说这个，
应该没有忘了放学后的一决胜负吧？
哦……记得啊！
哦……
不止是考试。
カラ…
ホホホホ
不要连网球比赛也那么丢脸哦！
控制 控制
欺……
欺人太甚！
咔
哇？


不好……
没有集中精神
……
因为，
这样将球
打回去，
球拍对球的作用
力不是比球对球
拍的作用力要大
吗？
啊！
如果，
球拍与球受的力
相等的话……


啊！
如果相等的话，
ばっ
パァ
わっ!!
力相互抵消了……
球就飞不起来了啊！！
あ あ あ あ ぁ あ
咕噜
咕噜…
比赛结束！
早矢香，获胜！
那么，输家，接下来的整理工作就拜托你了！
输了……
ホ ホ ホ ホ ホ


キーンコーン
カーンコーン
唉……
输给早矢香了，
结果那个疑问
还是没有解开。
咻！
好疼！
啊！
……
对不起！
同班的
野野村良田
同学……


他可是学校里的名人啊，
货真价实的“国际物理奥林匹克”大赛的银牌得主。
※想起来了……
呃……这是？
嗯
球滚到脚边了，然后……
想用手投到筐里面。
我，在运动方面真是很差劲！
不用投，简单地拿着放进来，不就行了吗？？
对……对啊！



啊，
你不是存心的，也
没有关系了……
ゴロロン
都这个时候了
野野村同学你
在这里干什么
呢？
……一边看刚才的
比赛，一边进行球
的运动的物理计算
……
Magnus.
哇——
不愧是物理奥林
匹克大赛的银牌
得主！
啊……
那么，
我输球的时候你也在？
嗯……
ゴオオオオオ
听着！
我输球是有原因的！
ピスー
哈……


今天的物理考试出了网球的问题吧？
嗯！
网球比赛时，在想那个问题……
感兴趣……
这个——
原来如此……
在比赛中不能集中注意力，
对了！
野野村同学，能告诉我那个问题的原理吗？
ぽん
呃……
不是拿过银奖吗？拜托了！


嗯，但是……
……
好疼……
好像刚才被球打中的地方一下子疼起来了。
呜呜……
那是肚子！
我打中的是你的头！
好了……
我答应你！
真的!?
不过要认真学哦！
嗯!!

第1章

作用力与反作用力定律



1. 作用力与反作用力定律

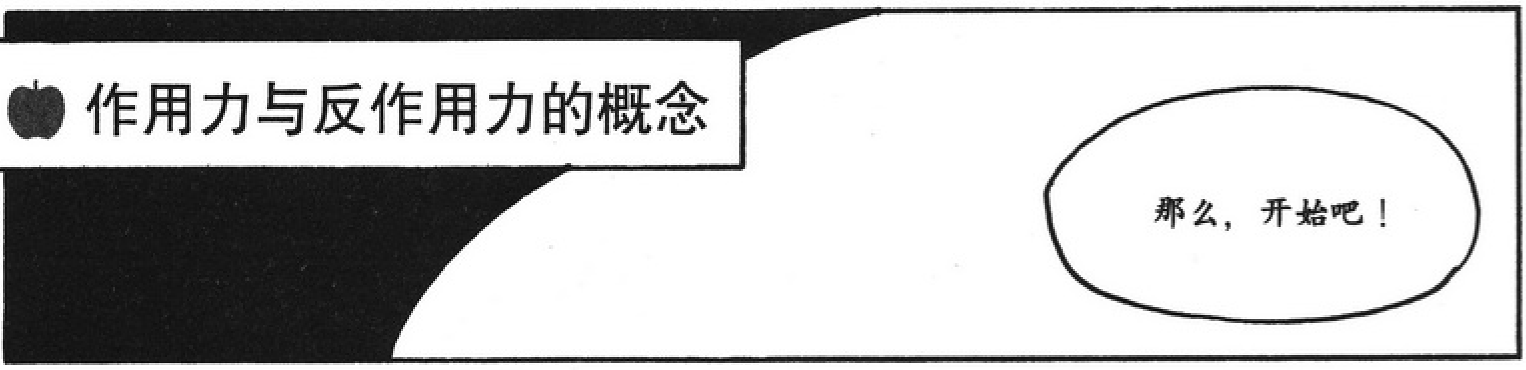








作用力与反作用力的概念






用身体亲身感受一下吧！
用身体？
嗯，用身体。
哦
不是那个意思。
那是……滑冰？
总之，先穿上这个吧！
嗯？
这……这样好吗？
啊，正好。
没关系，我也穿上了。
呃，我的体重大概是60kg
二宫同学的体重大概是……
啊
……算40kg吧，应该比我轻。



那么……
我把手固定在这里，
你来推一下。
结果会不会是二宫同学在原地不动，只有我动了呢？
简单简单，
那么这样的结果呢？
应该是吧，
40kg 的我推动 60kg 的野野村同学，
40kg 的我！
试试吧，……这样很好玩呢。
啊……啊？
啊，我和二宫同学都动了。
而且二宫同学移动得更远一些
……嗯……
？

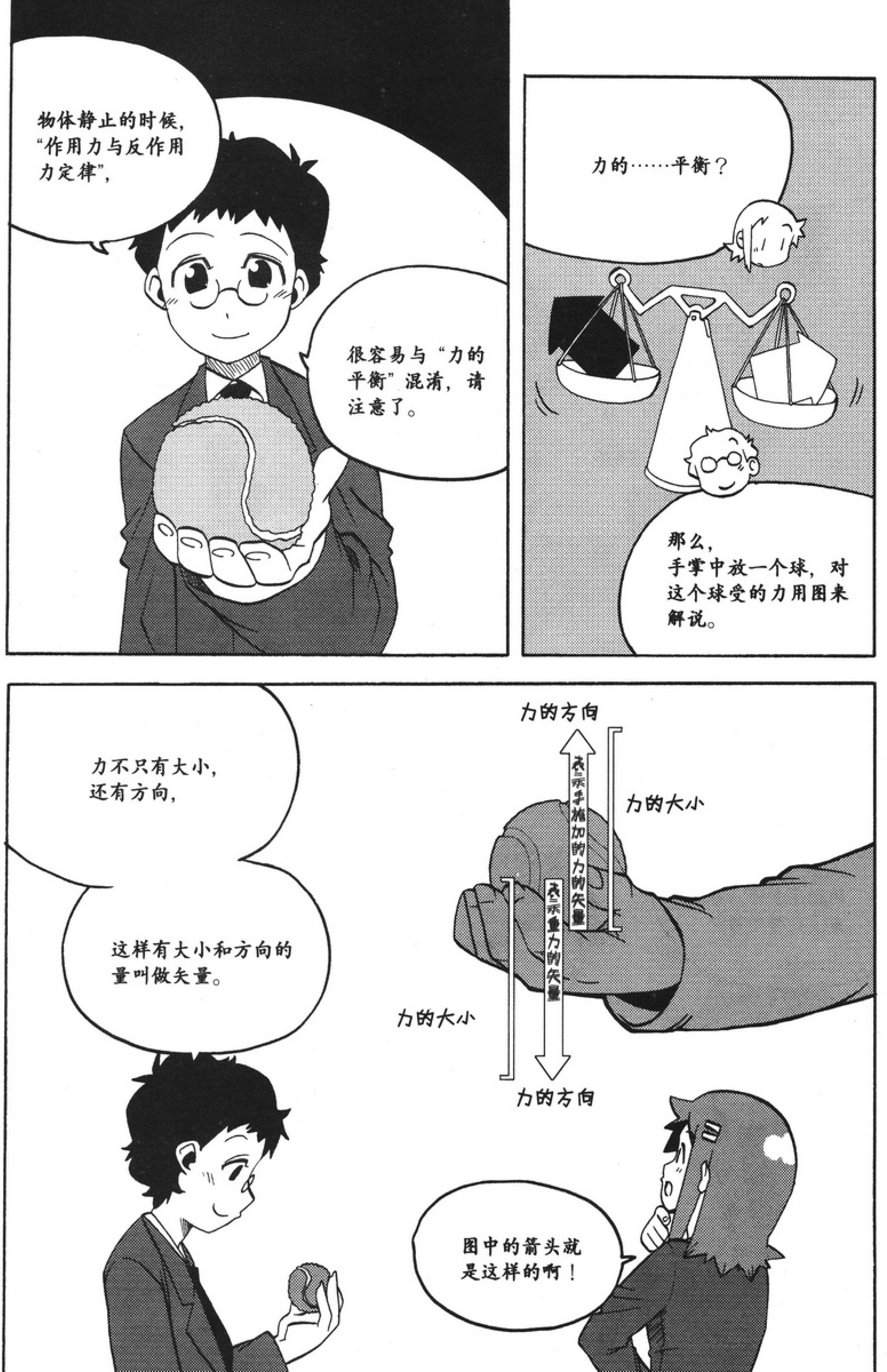

现在反过来，
我来推，两个人还是都往后运动。
这样？
二宫同学在对我施加力的同时，
即使我不对二宫同学施加力，
我的手也会有力自然的施加给二宫同学。
二宫同学不管对我施加什么方向的力，施加多大的力，
你一定会受到相反方向的同样的力。
所以，没法只使对方运动而自己不动。


而且，
那两个力大小肯定
相等。
这个就是“作用力与反
作用力定律”的概念，
力肯定是成对出现的！
噢——
嗯
严谨的表述就是
这样。
某个物体（A）对另一个物体（B）施加作用力，这个物体（A）会受到另一个物体（B）施加给它的大小相等、方向相反的反作用力。
这个定律在研究两个物
体的相互作用力时，总
是成立。
A
B



力的平衡




物体静止的时候，“作用力与反作用力定律”，
很容易与“力的平衡”混淆，请注意了。
力的……平衡？
那么，手掌中放一个球，对这个球受的力用图来解说。
力不只有大小，还有方向，
这样有大小和方向的量叫做矢量。
力的方向
表示手施加的力的矢量
力的大小
表示重力的矢量
力的大小
力的方向
图中的箭头就是这样的啊！



箭头的方向表示力的方向，长度表示力的大小。
这么说，
重力与手施加的力大小相等？
对，像这个图表示的关系成立，这是力的平衡的思考方法。
球受的力平衡
=
手施加的力
+
重力
=
0
ゼロ
因为力相互抵消了，所以没有动。
这样，如果我很快的把手拿开，球失去了支撑的话，
啊、掉下去了
ぱっ
球受的力就只有重力，会往下落。
ヒュー
咚

力的平衡和作用力与反作用力定律

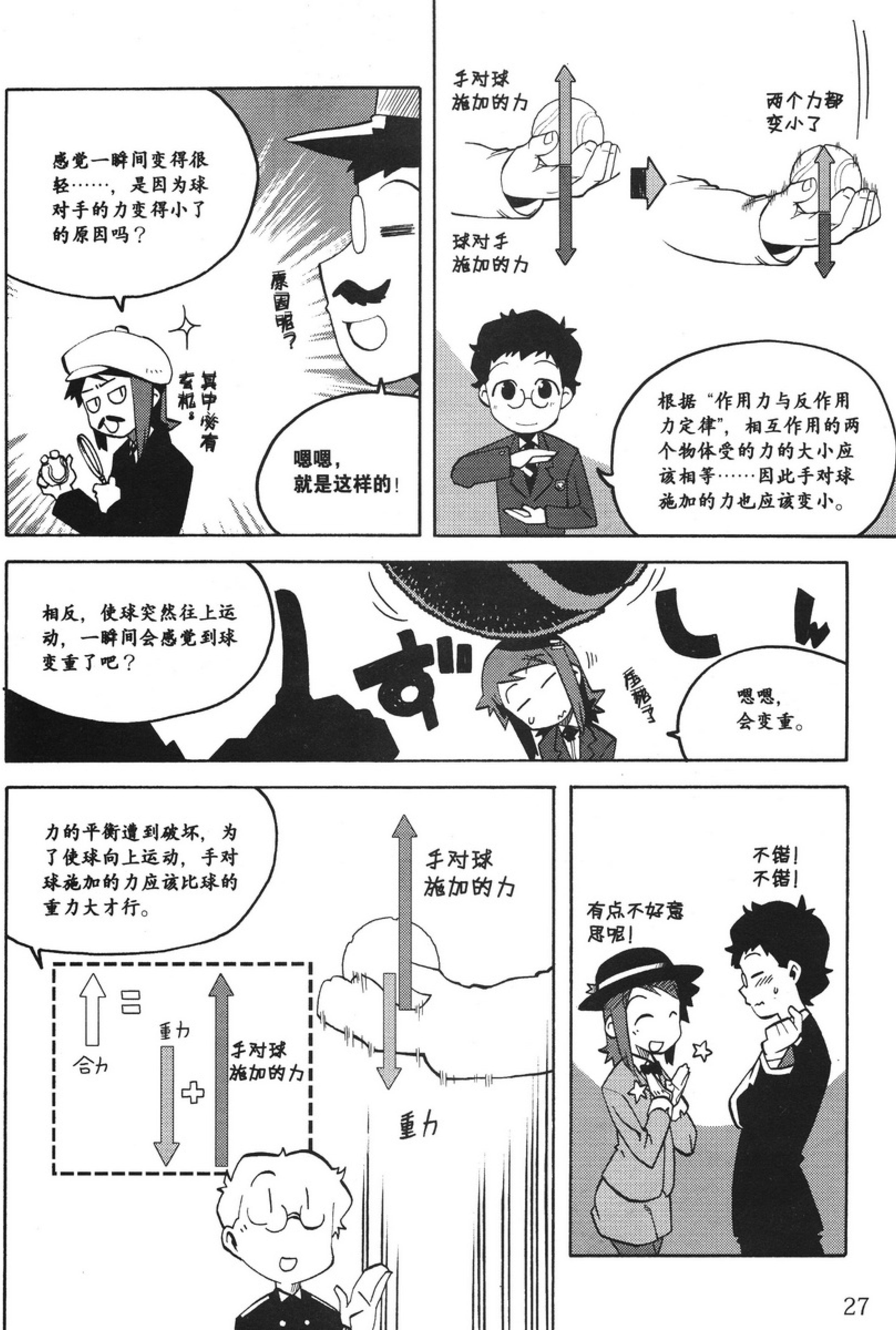



力的平衡考虑的是一个物体所受的力。
作用力与反作用力定律则需要考虑像球和手这样给对方施加的力。
这样啊！
这就是“力的平衡”与“作用力与反作用力定律”之间的差别啊！
手里拿着球能感觉到重量吧？
这是由于球对手有压力，手对球也有支撑力的原因。
这是作用力与反作用力定律！
确实与力的平衡不一样。
为了便于进一步理解，试试这样。



这个静止的物体运动起来了。
……知道是为什么吗？
……嗯？
现在，我将手突然往下移动，这个球也会跟着一起往下运动。
那是……
不是因为手往下运动而带着它往下运动吗？
手往下移动……
手施加的力
重力
静止状态
(力的平衡)
手施加的力
重力
的确是这样……
不过请从力的大小关系来思考一下。
力的？
嗯……
……随着手往下移动，
手对球施加的力突然变得很小，
这样……
……是吧？


是……
是这样吗？
……！
喂！！！
正是这样的！
由于手对球施加的力变小，破坏了力的平衡关系，产生了向下运动的力，
这是用“力的平衡”思考而得到球往下落的结论。
向下降落了
手对球施加的力
重力
合力
=
重力
+
手对球施加的力
研究力的大小，“重力”—“手施加的力”，得到的力方向向下。
那么再用“作用力与反作用力定律”研究一下吧。
研究球与手两方面的力。
就是这样！手往下运动的时候，球的重量是什么样的感觉呢？


感觉一瞬间变得很轻……，是因为球对手的力变得小了的原因吗？
原因呢？
其中必有玄机！
嗯嗯，就是这样的！
手对球施加的力
球对手施加的力
两个力都变小了
根据“作用力与反作用力定律”，相互作用的两个物体受的力的大小应该相等……因此手对球施加的力也应该变小。
相反，使球突然往上运动，一瞬间会感觉到球变重了吧？
ずしん
压扁了
嗯嗯，会变重。
力的平衡遭到破坏，为了使球向上运动，手对球施加的力应该比球的重力大才行。
合力
=
重力
+
手对球施加的力
手对球施加的力
重力
有点不好意思呢！
不错！不错！







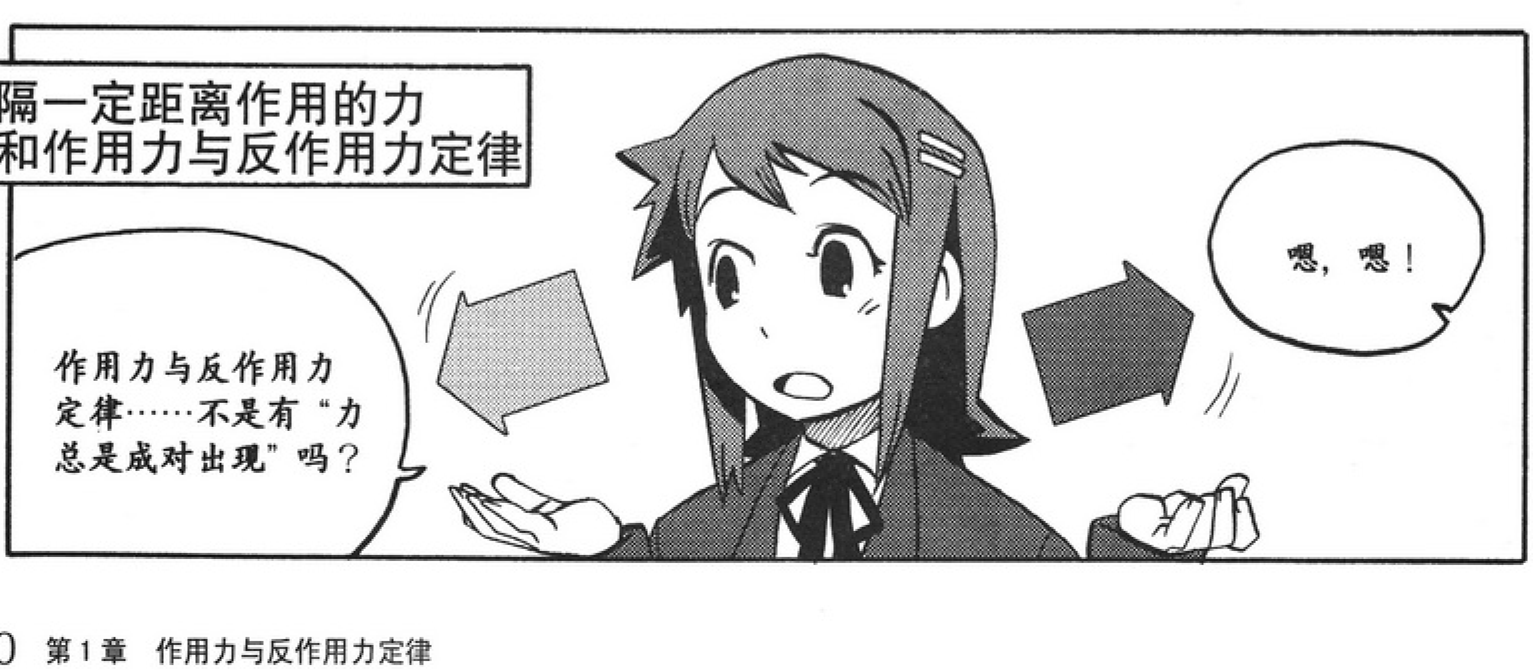
问题 9

想象一下网球拍击球的状况，球对球拍的力，与球拍对球的力的大小关系是怎样的呢?


打网球回球的时候，球拍对球施加的力，根据击打方式和速度而变化。
嗯，是这样！
球碰到球拍的时间是很短的一瞬间，如果仔细研究，在那个瞬间里，力的关系时刻都在发生变化。
当然，球对球拍施加的力也在变化……
球对球拍施加的力
球拍对球施加的力
球刚碰到球拍的时候
不管在什么时候，这两者的力总是方向相反，大小相等。
球拍对球施加的力
球对球拍施加的力
力最大的时候



隔一定距离作用的力和作用力与反作用力定律





施加使球运动的重力。
??
那么对球施加使其运动的重力的主体是什么呢？
是怎么想到的，这个……
不过问得好！
答案是地球。
啊？地球！？
不止是球，我、二宫同学、空中飞行的飞机都会受到地球的引力作用，地球对物体的吸引力而形成重力。
嗯，一下子讲不明白啊……
重力是隔一定距离作用的力，与让球运动的重力……也就是地球对球施加的吸引力一样。
球对地球也有吸引力。
地球对球的吸引力。
球对地球的吸引力。


球也会吸引地球吗？
因为相互作用的原因。
所有有质量的物体相互之间都有“万有引力”，从而相互吸引。
噢，不过，球……
由于地球的质量比球的质量大得多，因此球没法让地球运动。
原来如此！
啊！
那，我跟野野村同学之间也有万有引力而相互吸引？
说好了要认真学习的啊，还拿我开玩笑……
脸红了
脸红了
……万有引力与相互吸引的物体的质量的积成比例关系，
人体由于质量比较小，因此，相互之间的吸引力也很小，从而不会吸在一起。

2. 牛顿运动定律


物理学的基础——力学
接下来……
“作用力与反作用力定律”也叫做“牛顿运动第三定律”。
第三，还有一和二？
一共有三个，总称为“牛顿的三大运动定律”。
在学习这些定律的知识之前……二宫同学，
嗯？
你认为物理是用来解决什么问题的学问？


只觉得是需要记公式的学科……
听了野野村同学的解释，想法也有了些改变。
是“理解运动方式的学问”吧？
说得好！
物理绝对不是单纯背公式的学科。
我认为“物理是能用定律解释
和数值方法分析自然现象的学问”。
哦！有见解！
那，那个，物理学的基础是力学。


力学的目标是预见物体的运动，也就是能正确分析出物体什么时候在什么地方。
怎么跟我的感觉有点不一样。
拍摄运动着的球，这样就能很简单地解释“物体什么时候在什么地方”了。
哦，对啊！
不过，为了预见现在投出去一个球，一秒后这个球在什么地方，
就有必要知道球遵循什么样的规律而运动。
原来如此！


这个大前提就是力学的基本定律"牛顿的三大运动定律"。
作用力与反作用力是其中的一个……
呀！
啊！已经到这个时候了！？该回家了吧？
呃，今天多谢你了！感觉好像对物理有了点兴趣！
啊，嗯！
下次接着听你讲！
那，再见！
为什么那两个人从物理教室出来？
那是田惠……和物理迷野野村同学？

后续

标量与矢量

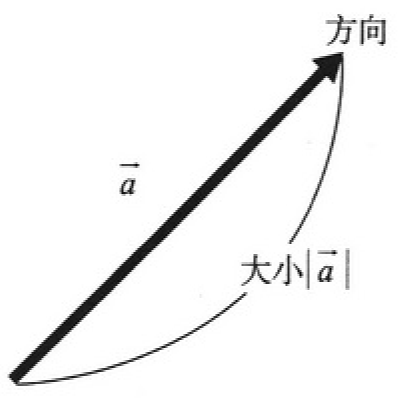
物理学中经常出现像力、质量、速度这样的各种各样的物理量。物理量分为只有大小的量，和有大小和方向的量两种。只有大小的物理量叫做标量。质量就是标量。其他的还有，第 4 章学习的能量和功也是标量。

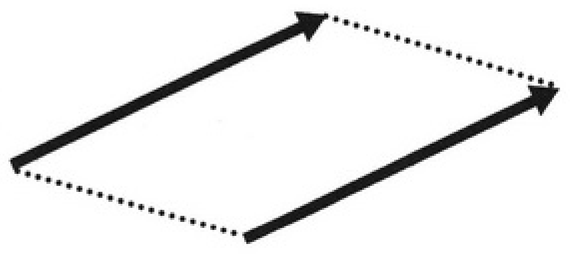
与此相对，力不只有大小，还有方向。这样就能理解施加的力的方向不同，物体运动的方向也不一样了。像这样既有大小又有方向的物理量叫做矢量。不只是力，第 2 章学习的速度、加速度，第 3 章学习的位移，都有大小和方向，都是矢量。标量和矢量只是两个名称，需要记清楚的是，在物理学中出现的量，分为只有大小的量和既有大小又有方向的量两种。

矢量的基础知识

▶矢量的表示方式

矢量可以用箭头（有方向的线段）表示。箭头的长度表示矢量的大小，箭头的方向表示矢量的方向。大小和方向都相同的两矢量相等。因此，平行移动能完全重合的两个矢量也是相等的矢量。

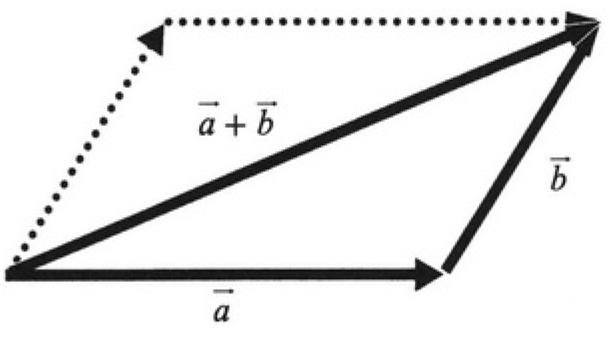


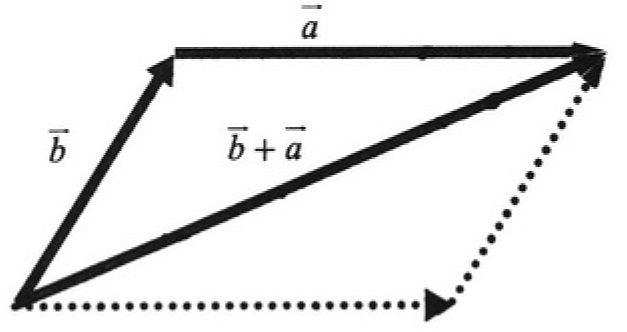


平行移动能完全重合的两矢量相等

而且，矢量$\vec{a}$的大小（长度），既可以用绝对值$|\vec{a}|$表示，也可以只用 $\boldsymbol{a}$ 来表示。

▶矢量的和





两个矢量的和$\vec{a}+\vec{b}$，如上面的左图所示，在$\vec{a}$的终点处连接$\vec{b}$的起点，然后从$\vec{a}$的起点指向$\vec{b}$的终点的矢量就是二者的和。这个矢量是图上的平行四边形的对角线，很清楚的看出与$\vec{b}+\vec{a}$相等。也就是

交换定律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

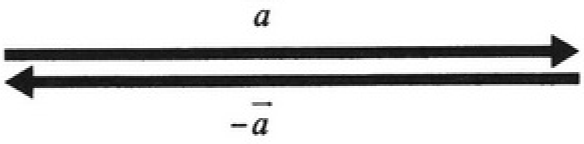
成立。

三个或三个以上的矢量的和，则是先求两个矢量的和，然后将这个和与剩下的一个矢量求和，不断将求两个矢量的和的方法重复使用而求得多个矢量的和。

▶含有负号的矢量

$\vec{a}$带有负号变成$-\vec{a}$，与$\vec{a}$相加得到的矢量为零。也就是

$$\vec{a}+(-\vec{a})=0$$



有这样的表达式定义。从图形上来看，$-\vec{a}$与$\vec{a}$方向相反。

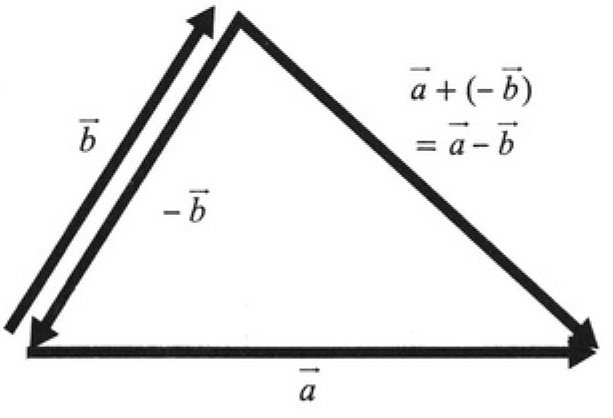
另外，右边的0是作为矢量的零，也就是用矢量零表示。这个也应该写成$\vec{0}$，不过在本书中，矢量零都只用0来表示了。

▶两个矢量的差

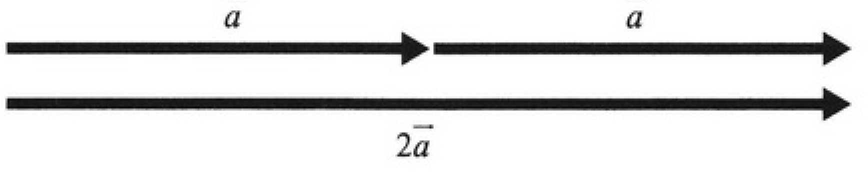
矢量的差$\vec{a}-\vec{b}$可以看作

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

因此可以采用矢量和的图形法求得结果。



▶矢量的倍数



取矢量$\vec{a}$的 2 倍，方向不变，长度（大小）变成原来的两倍，可以用$2\vec{a}$表示。

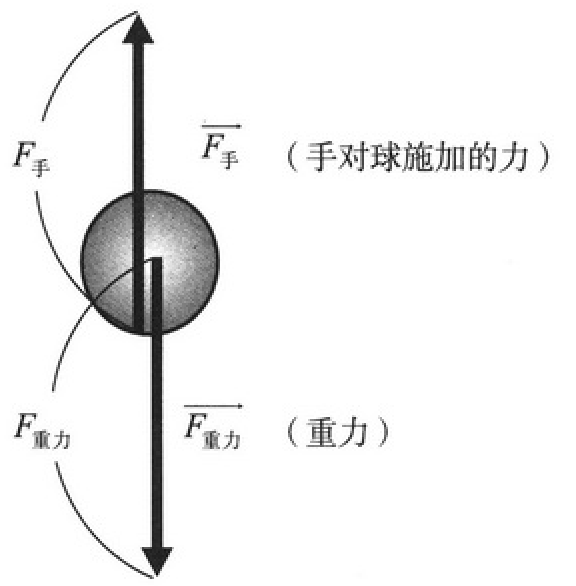
一般来说，$\vec{a}$的 k 倍用$k\vec{a}$表示，表示方向不变，长度（大小）变成原来的 k 倍（k 是任意的实数）。

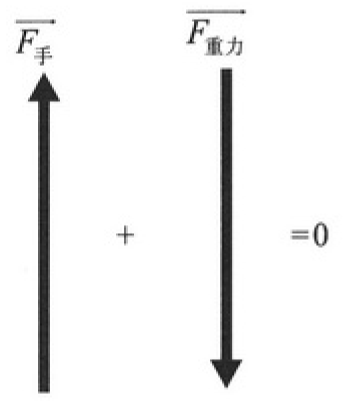
力的平衡与力的矢量

球所受的力的平衡（参见第 23 页）：

球受的力的合力＝重力＋手施加的力＝ 0

看这个式子，不会认为“＋与－弄错了吧？”由于力是矢量，这个式子是正确的。将力作为矢量来考虑的话，使物体运动的合力，是所有作用在物体上的力的和。





来详细研究一下放在手掌上的球的力的平衡。手对球施加的力表示为 $\overrightarrow{F_{手}}$，球的重力表示为 $\overrightarrow{F_{重力}}$，那么使球运动的合力 $\overrightarrow{F_{合力}}$ 为

$$\overrightarrow{F_{合力}} = \overrightarrow{F_{手}} + \overrightarrow{F_{重力}}$$

由于球处于平衡状态，所以合力为 0。

$$\overrightarrow{F_{合力}} = 0 \quad 也就是 \quad \overrightarrow{F_{手}} + \overrightarrow{F_{重力}} = 0$$

矢量 $\overrightarrow{F_{手}}$ 与 $\overrightarrow{F_{重力}}$ 大小相等，方向相反，因此相加得到 0。用文字表示则是：

手对球施加的力＋球受的重力＝ 0

如果，力作为矢量在只考虑大小的情况下怎么表示呢？就像 p37 页说明的一样，力的大小，用绝对值如 $\left|\overrightarrow{F_{手}}\right|$、$\left|\overrightarrow{F_{重力}}\right|$ 这样表示。如果将它们换成 $\left|\overrightarrow{F_{手}}\right| = F_{手}$，$\left|\overrightarrow{F_{重力}}\right| = F_{重力}$，两个力的大小相等可以写成这样的减法运算。

$$F_{手} = F_{重力} \text{ 也就是 } F_{手} - F_{重力} = 0$$

在考虑力的平衡表达式的时候，需要明确区分是写成矢量的表达式，还是只考虑大小的表达式。

牛顿的三大运动定律

牛顿的三大运动定律如下：

第一定律（惯性定律）：
合力为零的物体，将保持静止或匀速直线运动状态。

第二定律（运动方程式）
物体的加速度，与物体受的合外力成正比，与物体的质量成反比。

第三定律（作用力与反作用力定律）
两个物体的相互作用力，在同一条直线上，大小相等，方向相反。

第 2 章有详细解释，在这里，解释一下本章研究的手掌上的球的相关问题吧。

根据第一定律可以得到，静止的物体受的合力为 0。也就是，**运动第一定律推导出静止物体处于力的平衡状态**。手掌上放的球处于静止状态，根据第一定律可以推导出，手对球施加的力与球受的重力这二者的合力为 0。

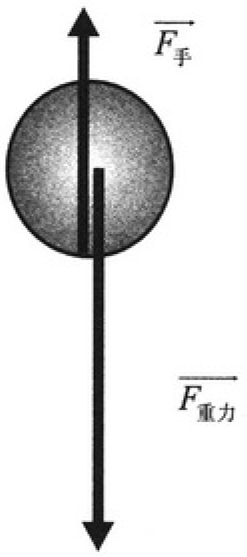
本章学习的**作用力与反作用力定律，是牛顿运动第三定律**。根据这个定律，可以得到，手对球施加的力与球对手的力大小相等，方向相反。

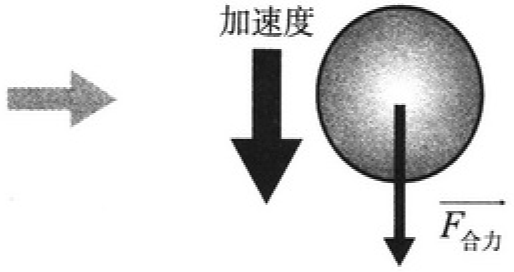
作用力与反作用力定律无论什么时候都是成立的。即使是在手运动带着球运动的时候，这个定律也是成立的。

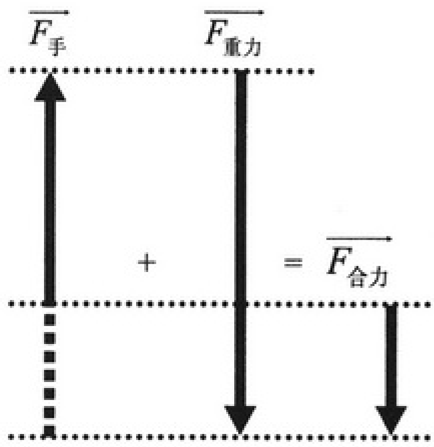
另外，根据牛顿第二定律，所受合外力不为零的物体作加速运动。手上放着球，手突然往下运动，手对球施加的力 $\overrightarrow{F_{手}}$ 瞬间变得很小，而球受的重力 $\overrightarrow{F_{重力}}$ 没有改变，因此，力的平衡状态被破坏，球受的外力 $\overrightarrow{F_{合力}}=\overrightarrow{F_{手}}+\overrightarrow{F_{重力}}$ 不再是 0。只考虑大小，得到

$$F_{合力}=F_{重力}-F_{手}>0$$

合力方向向下。这时根据牛顿第二定律，由于受力的作用物体有了加速度，这个加速度与物体受的合力成正比，球往下加速运动，即球开始运动。像这样，由于手突然往下运动，球也往下运动的现象可以用力学进行解释。让球突然往上运动的情况也可以用完全相同的方法进行分析。







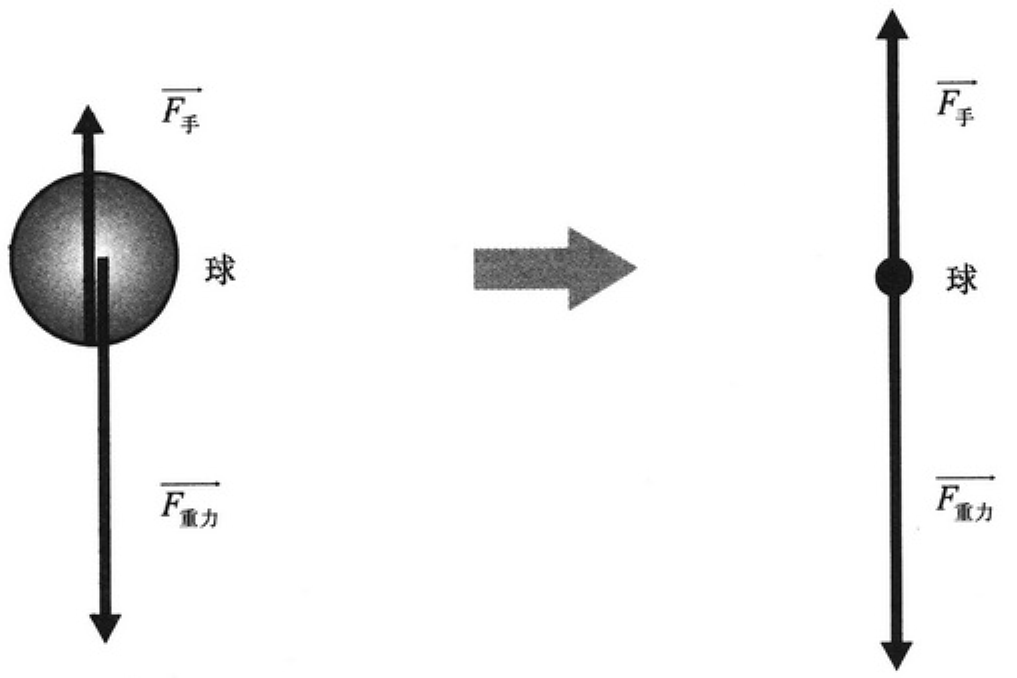
手突然往下运动，力的平衡状态被破坏，球有了往下的加速度而往下运动。

然而，必须注意一点，球以一定的速度往上运动或往下运动的时候，球处于力的平衡状态，球受的合力为零。这个可以根据运动的第一定律推导出来。当物体所受合力不为 0 时，物体的速度会发生变化，即有加速度。而速度一定的时候，加速度为零，因此合力也为零，即物体所受的力处于力的平衡状态。

当物体从静止状态开始运动的时候，总是由于受到施加的外力作用的原因。之所以这么说，是因为物体开始运动表示从速度为 0 的状态变成速度不为 0 的状态，行进速度发生变化的运动即加速运动。

用矢量表示重力的位置

上图中画了球受的力的矢量图，$\overrightarrow{F_{手}}$ 和 $\overrightarrow{F_{重力}}$ 的起始点的位置不在同一点。手对球施加的力是以手与球的接触位置为起始点画的。这个很容易理解，但是为什么重力的起始点要从球的中心开始画呢？其实，在初等力学中，物体都是简化为没有大小的点（质点）来处理的，用矢量表示的力的起始点的位置不同没有什么意义。只是，在图画中，用点表示比较难理解，因此一般都用有大小的物体来表示。



不过，很大的物体在力学中处理起来比较麻烦。为了便于处理，都将重力表示施加在物体的质量中心（重心）处。清楚了这点，画比较大的物体的图的时候，就可以将重力的起始点画在物体的重心处。请注意这点，在本书后面的内容中，物体的图画成上面左图这样的实际物体，但是，作为力学的研究对象，都像上图的右图一样，物体都忽略大小，简化成一个点来处理。

提　高

作用力与反作用力定律的表达式

作用力与反作用力定律用语言的正确表示如下所示：

两个物体的相互作用力，在同一条直线上，大小相等，方向相反。

将这个文字表示的作用力与反作用力定律用式子表示出来是怎样的呢。物体 A 对物体 B 的力表示为$\overline{F}_{A\rightarrow B}$，物体 B 对物体 A 的力表示为$\overline{F}_{B\rightarrow A}$，那么作用力与反作用力定律可以表示成：

$$\overline{F}_{A\rightarrow B}=-\overline{F}_{B\rightarrow A} \tag{1}$$

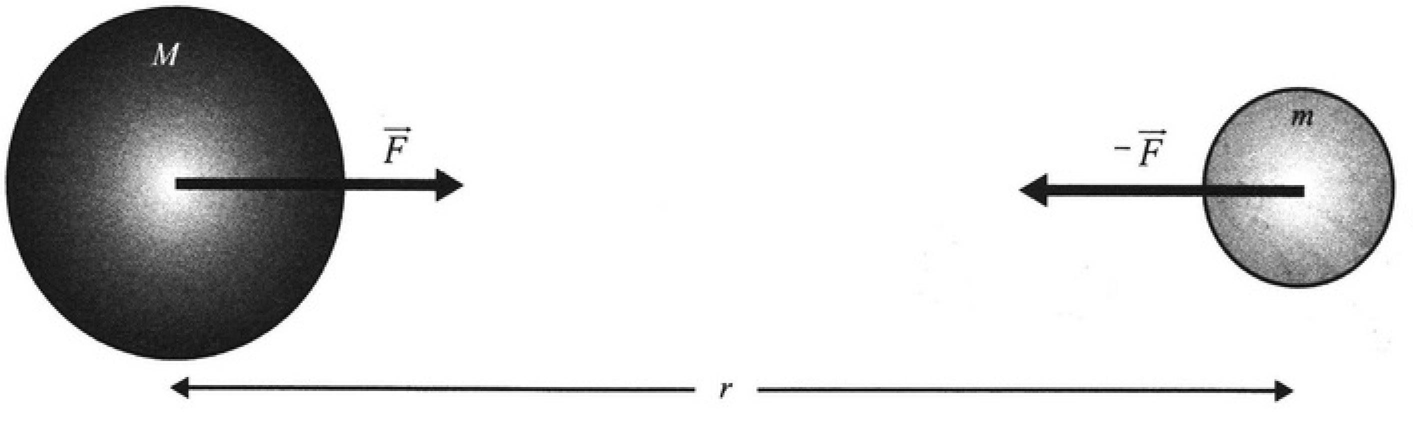
只用这么一个式子就可以表示出来。其实，将式（1）用绝对值的方式表示出来是这样的：

$$\left|\overrightarrow{F}_{A\to B}\right| = \left|\overrightarrow{F}_{B\to A}\right|$$

因此可以推导出作用力与反作用力的大小相等。如果拿掉绝对值符号，加上负号，可以得到作用力与反作用力的方向相反。像这样，用式子来表示物理定律的方法，比文字的表示方法要简洁，也能正确表示出定律的内容。

重力与万有引力

狭义的重力的定义，是地球对物体施加的吸引力。这个力是由于万有引力产生的。两个物体之间，存在着与它们质量的乘积成正比、与它们之间的距离的平方成反比的吸引力。这个引力就是牛顿发现的万有引力。因为所有拥有质量的物体都受到这个力的作用，因此叫做万有引力。万有引力的大小与物体的种类没有关系，由产生万有引力的两个物体的质量和它们之间的距离决定。



如图所示，质量为 M 和 m 的两个物体之间的距离为 r，这两个物体之间的万有引力的大小 F 为：

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{2}$$

在这里，G 是万有引力常数，是一个常数。

$$G = 6.67\times10^{-11}(\mathrm{N}^{※}\cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2)$$

※ 关于单位牛［顿］（N）请参照第 63 页。

万有引力满足作用力与反作用力定律。其实，根据式（2）的表示，质量为 M 的物体对质量 m 的物体的万有引力作用和质量 m 的物体对质量 M 的物体的万有引力作用，二者大小相等，方向相反，因此满足作用力与反作用力定律。需要注意像这样的情况，有一定距离的物体相互之间的力的作用，也满足作用力与反作用力定律。

万有引力与电磁力相比，是很小的力。不过，电磁力根据正号、负号的组合，有时为吸引力，有时候为排斥力，与此相对，万有引力总是吸引力。因此，宇宙颗粒（也可以叫做宇宙灰尘）之间相互吸引而不断累积起来，经过足够长的时间，可以形成像地球或太阳这样的星球。可以说，很小的颗粒累积起来可以形成山，甚至可以说，很小的颗粒，累积足够多也可以形成星球。

第2章

力与运动



1. 速度与加速度

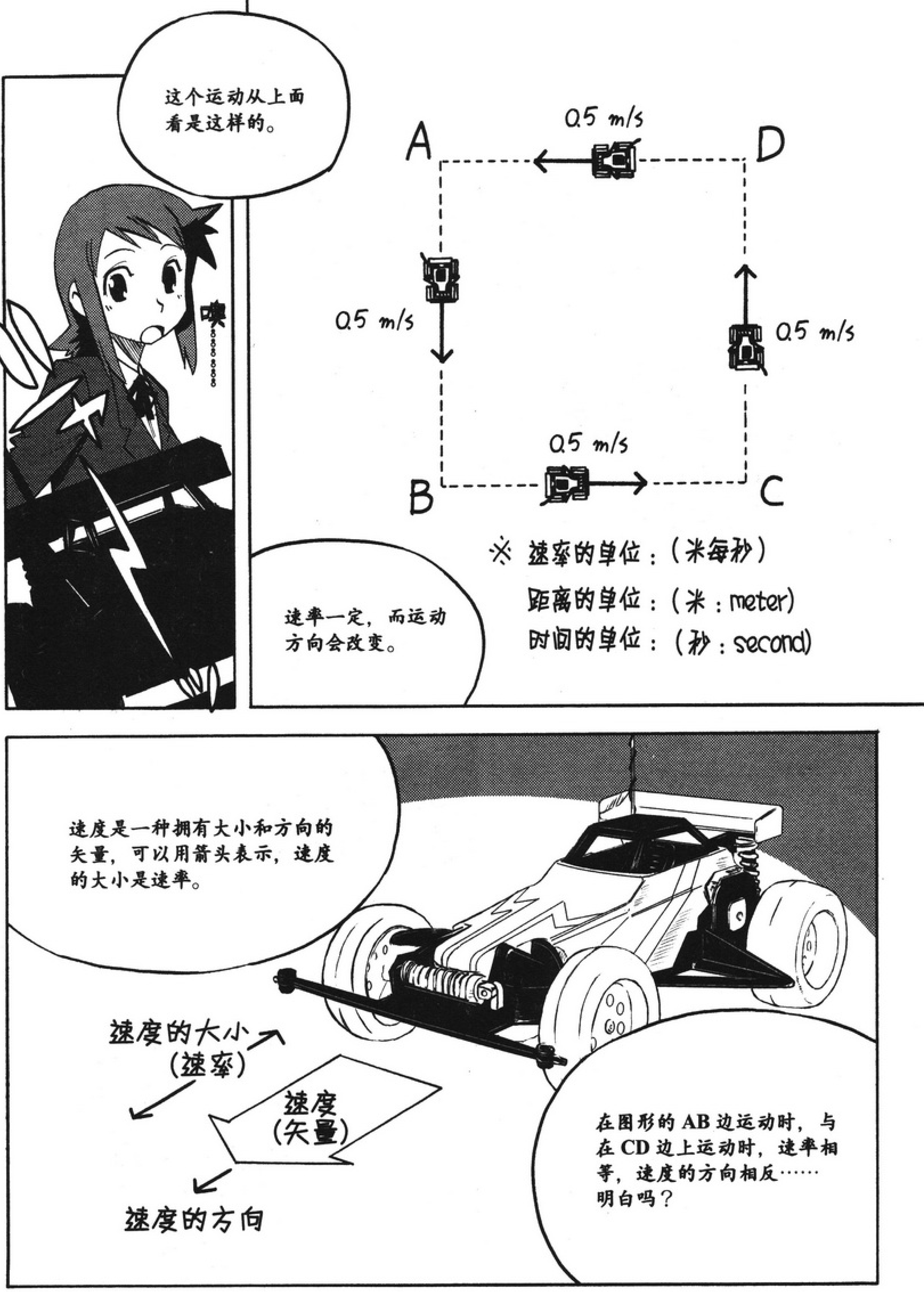
匀速直线运动





不过，即使是相同的速率，如果行进的方向不同的话，到达的地方也不一样。
如果也考虑这个行进的方向的话，将速率换成速度，距离换成位移，有这样的公式成立。
速度＝位移/时间
这样……啊？
はいっ！
等一下！
速率与速度是不同的概念吗？
呵呵呵，看样子注意到了呢！


那么，关于速率与速度之间的区别
用这个来研究吧！
ぱぱぱ
ぱーん
……野野村同学还真是什么东西都拿到学校里来了呢！
这个，那个，
是教材！仅仅是教材！
看……这个无线电控制车根据程序设置，可以做各种动作，是很好的东西。
呃……高科技呢！
现在，设置它的速率为每秒 50cm……也就是 0.5m/s，让它沿着正方形运动。
那么，实际让它运动起来看看吧！


这个运动从上面
看是这样的。
噢
A
B
C
D
0.5 m/s
0.5 m/s
0.5 m/s
0.5 m/s
※ 速率的单位：(米每秒)
距离的单位：(米：meter)
时间的单位：(秒：second)
速率一定，而运动
方向会改变。
速度是一种拥有大小和方向的
矢量，可以用箭头表示，速度
的大小是速率。
速度的大小
(速率)
速度
(矢量)
速度的方向
在图形的 AB 边运动时，与
在 CD 边上运动时，速率相
等，速度的方向相反……
明白吗？

匀加速运动



カタカタ…
カタ…
カタ…
这次设置速度从 0 开始以一定的速度增加到 0.5m/s，来看看运动情况。
カリカリ
カリカリ
在这种情况下，单位时间内的速度的变化叫做加速度，可以用这样的式子来计算。
加速度＝速度的变化/时间
哦哦！
加速度的单位是米/秒²，写成 m/s²。即一秒的时间里速度的增加量。
カタ
カタ
カタ
是速度变化除以时间呢！
当然，速度没有变化的情况下，速度的变化量为 0，加速度也为 0。
ピピーッ


在速度增加的情况下，加速度是正的，而速度减小的情况……加速度为负的。
慢吞吞……
加速度还有负的？
……也可以说成是减速度。
负的加速度等同于减速度。
慢慢
吞吞
特殊情况，速度以一定比例变化的运动叫做匀加速运动。
速度
无线遥控车的设置也是匀加速运动呢！
停下来了。
继续动呀……



那么，用公式来求一下无线遥控车的加速度吧？
嗯！
遵命!!!
呃……
无线遥控车在4秒的时间里，速度从0变成了0.5m/s。
公式
加速度=速度的变化/时间
将这个代入公式来计算。
……是0.125m/s²吧？
就是这个答案！
要更加有点自信呢！
根据这个加速度值，可以知道一秒内，速度增加了0.125m/s。
运用这个，可以求出速度变化情况下的位移。
原来如此啊！

速度变化情况下的位移



无线遥控车的速度以一定的比例从0增加到0.5m/s。这里的问题是，速度在第4秒时为0.5m/s，它在这段时间里位移是怎样的呢？

呜……初速度为0，最大速度为0.5m/s，那么取中间的平均速度0.25m/s来计算吧，0.25m/s ×4s=1m！

对！思维敏捷呢！那么，可以解释一下为什么可以这样计算吗？

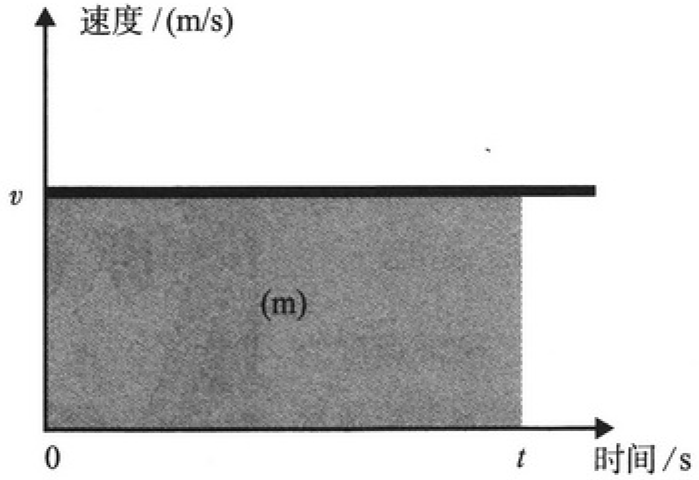
呜……将原因告诉我是你野野村同学的工作吧！

说得也是呢……在说正确的答案之前，先说明一下求速度变化情况下的位移的方法。当速度一定的时候，位移用“速度 × 时间”来计算。从计算行进位移的时刻开始，经过 t 秒（s）位移用 x 米（m）表示，定值速度用 v（m/s）表示，“距离 = 速率 × 时间”的表达式为

$$x=vt$$

这个很简单啊！

将这个表达式用以速度为纵轴、时间为横轴的图表示出来是这样的。



图中的面积表示位移。像这样的图形，是速度与时间的图形，通常叫做 v-t 图。求横轴长为时间 t，纵轴长为速度 v 的长方形的面积即可得到位移。

原来如此啊！面积来表示位移，感觉有点奇怪呢！

这里的面积，不是普通的图形的面积。普通的长方形的面积的单位是平方米（m^2），这个面积是由纵轴长度（m）× 横轴长度（m）得到的，而在本图中，横轴是时间（s）、纵轴是速度（m/s），因此它们相乘得到的量的单位是（s）×（m/s）=（m），即为长度的单位。

以定值速度运动的情况的位移比较容易求，在速度变化的情况下要怎么求位移好呢？

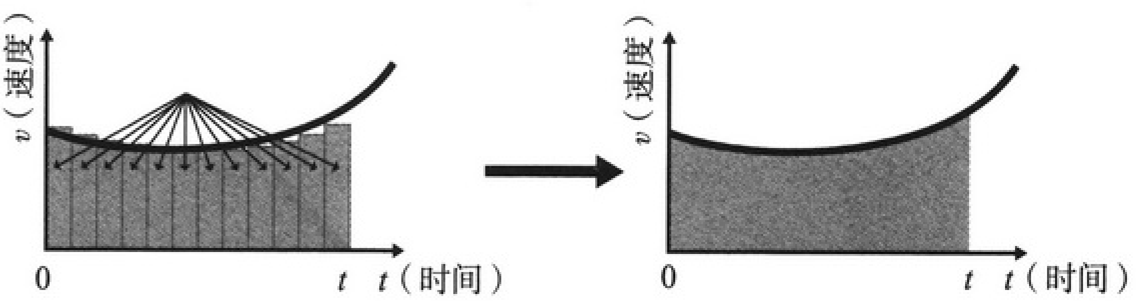
我们使用的工具只有

距离 = 速率 × 时间

在此，将时间划分成很小的区间，从而得到很多“很小的长方形”，在一个很短的时间内，可以将速度看成一个定值来计算位移。

这是怎么回事？

用图形表示就是下面的左图所示。



逐一求小区间的狭长的长方形的面积，将这些面积值加起来就可以得到位移。

这些长方形的面积与划分的区间的面积相比，有的超出了，有的有间隙，不是有误差吗？

对啊！把长方形划分得更细一点吧，无限细化以后得到像上面右图的图形，没有间隙，得到的位移就是正确的了。

的确是这样呢！

无限细化后，就应该能完全计算出位移了。因此，在很短的时间区间内使用“距离 = 速率 × 时间”计算得到值的极限，就是 v-t 图形的面积。因此，求得了面积就能求出位移了。可以总结为：

位移 =v-t 图形的面积



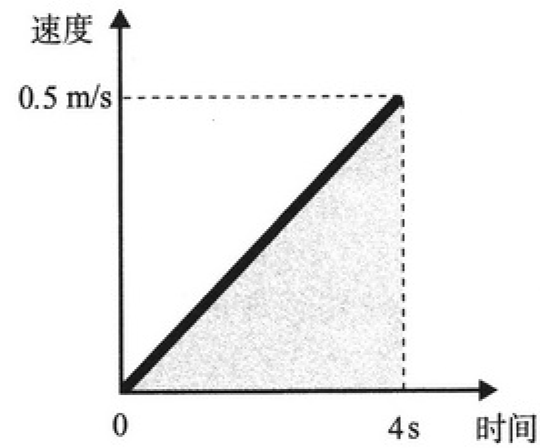
基于以上的解释，来看看二宫同学能计算出位移的正确方法吧！



好！



二宫同学的计算，是采用了速度与时间的图形的面积的计算方法。将无线遥控车的例子图形化是这样的。



图形的面积，可以用三角形的面积公式求：

$$\frac{1}{2} \times \text{底边（时间）} \times \text{高度（速度）} = \frac{1}{2} \times 4 \times 0.5 = 1$$

这就是位移。



刚好也得到 1 ！

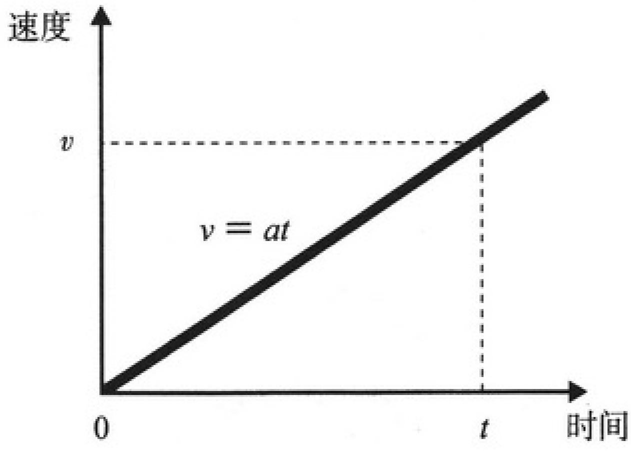


不局限于特定的数字，用一般的表达式来表示位移。速度用 v、时间用 t、加速度用 a 表示，匀加速运动时速度与时间的关系为：

$$v=at$$

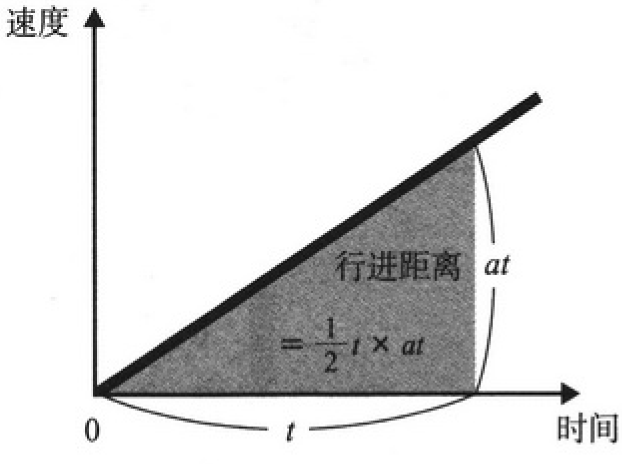


将这个表达式用 v-t 图形表示，是这样的。



在这里，时间 t 内位移用 x 表示，x 的值，等于底边 t、高度 at 的三角形的面积，因此可以得到：

$$x = \frac{1}{2}at^2$$





呃……将无线遥控车的数据代入公式中，$\frac{1}{2} \times 0.125 \times 4^2 \cdots$，刚好等于 1！



这样二宫同学就不会计算错了，能准确计算出匀加速运动的位移了！

2. 运动定律



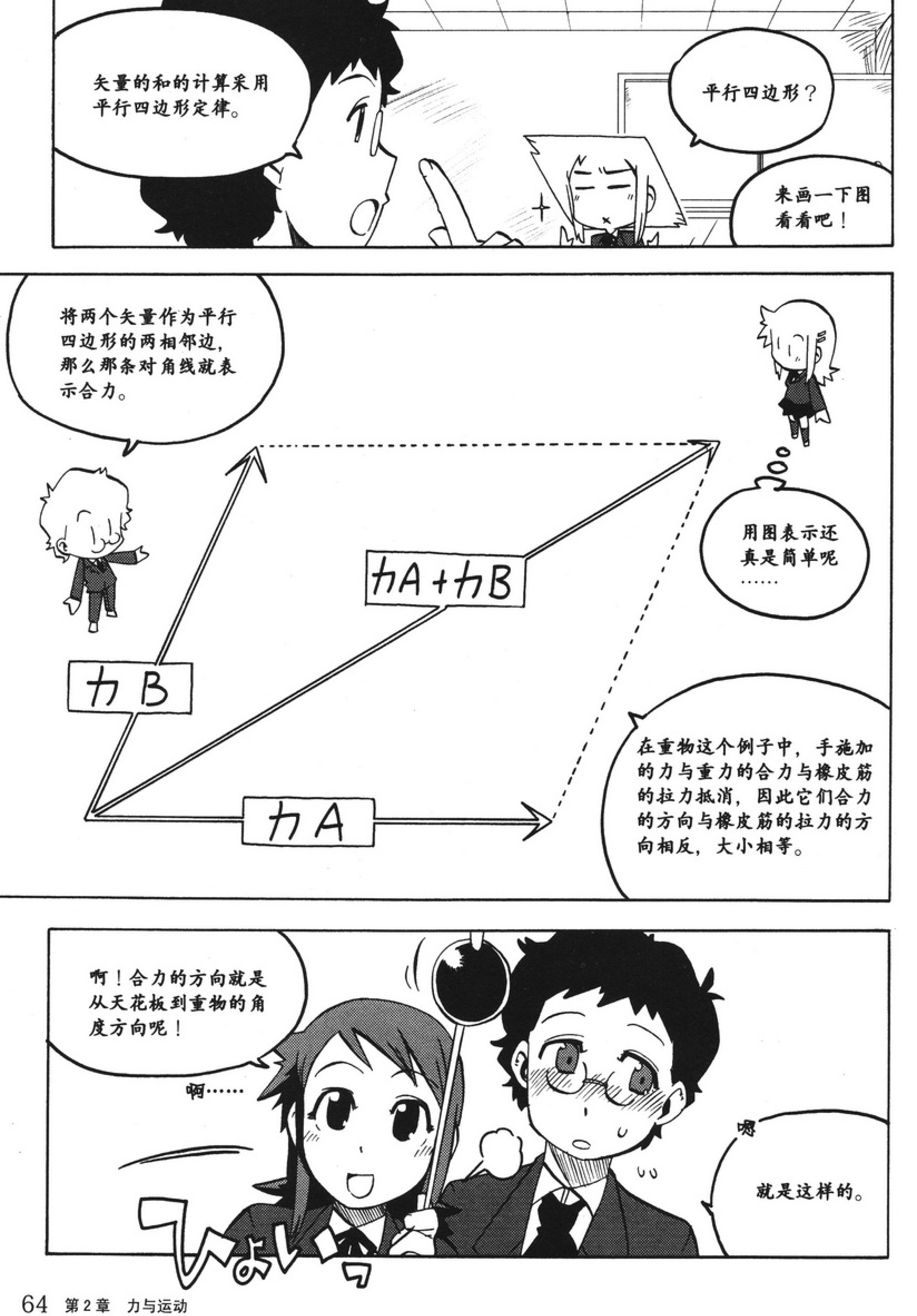
惯性定律
现在来看一下物体运动的相关知识吧。
首先是静止状态……
也就是，
力为 0 的情况。
零！
请注意，虽然力为 0，实际上物体受到各种各样的力，只是这些力都抵消了，从而得到合力为 0。
将物体所受的所用的力都用矢量表示，这些力叠加后得到的力……合力为 0。
手施加的力
重力
这里球的例子就是这样的吧？


不是没有受到力的作用！
什么啊!?
为了有助于理解，
我准备了这个东西！
不用这么
惊讶吧！
好吧！
天花板
橡皮筋的拉力
重力
橡皮筋的拉力
+
重力
=
0
现在，物体处于静止状态，
因此，物体受的合力应该为0，施加在物体上抵消重力的力就应该是橡皮筋施加的。
那就是说橡皮筋的拉力与重力相等？
这个不用测量也能够知道吗？
这就是重点！



其实，“静止的物体受的合外力为零”这个结论是从牛顿的第一运动定律推导出来的。
1
对啊！
用仪器测量拉力和重力，能够确认它们相等，
如果使用这个定律，就能够推出静止的物体受的合力为零。
……关于运动的第一定律稍后再解释。
原来如此啊——
……那么，如果不是这种垂直向下的状态，合力也是0吗？
关于这个的解释，我知道……
来，拉这个挂有重物的橡皮筋看看吧！
呦！


……这个状态是静止的，
合力应该为０！
来看力的关系，一方面，重物受到垂直方向的重力，另一方面，还受到手从水平方向施加的力。
天花板
也就是重力与手施加的力相加得到的合力。
橡皮筋的拉力
手施加的力
手施加的力
重力
重力
重力与手施加的力的合力
这两个力的合力与橡皮筋的拉力平衡。
重力
手施加的力


矢量的和的计算采用平行四边形定律。
平行四边形？
来画一下图看看吧！
将两个矢量作为平行四边形的两相邻边，那么那条对角线就表示合力。
力A+力B
力B
力A
用图表示还真是简单呢……
在重物这个例子中，手施加的力与重力的合力与橡皮筋的拉力抵消，因此它们合力的方向与橡皮筋的拉力的方向相反，大小相等。
啊！合力的方向就是从天花板到重物的角度方向呢！
啊……
嗯
就是这样的。
ひょいっ



不管受到多少力的作用，只要物体处于静止状态，
它受的合力就为0。
有点困惑呢！
而且，即使合力为0，物体也可以处于运动状态。
什么！
例如宇宙空间。
宇宙空间？
应该看过航天飞机的舱内的摄像吧？
看过看过！舱内的物体都是悬浮着的。
在所有无重力空间里，运动的物体总是以相同的速度直线运动。
这么说好像是这样的。


一般运动的物体，
由于受到摩擦力的作用，
如果不继续施加力的作用，
运动的物体肯定会停下来。
不过在宇宙中，能实现受力为0且运动的状态。
这样啊！那样就即使没有力的作用物体也能持续运动。
对！
后面的人还好吧
沿着直线以相同的速率运动，也就是匀速直线运动，合力也为0。
咻！
想回来试试
嗯……


顺便说一下，这也是先前讲过的牛顿的第一运动定律的一个特征。
呃～
嗯！
如果把“力为0”改为“没有力作用”……
当没有力作用时，物体保持静止状态，或匀速直线运动状态。
这是第一运动定律，又叫做惯性定律。
物体保持做匀速直线运动的状态的性质叫做惯性。
啊
我有听说过惯性定律！
就是牛顿的第一运动定律！
是这样的。

运动方程式 $ma=F$



接下来研究关于“有力作用的运动”吧。
二宫同学你是骑自行车上学的吧？
早上好！
早上好！
对啊！因为从家到学校有点远……
静止的自行车当然要踩踏板才能开始动。
从速度方面来考虑，由于施加了力，自行车从静止状态开始变得有速度……
也就是，速度发生了变化，
……换句话说，由于施加了力的作用而产生了加速度。
嗯嗯！


而且，施加的力变大，加速度也会变大。
迟到了，迟到了……
有亲身体验就很容易明白……
相反，让自行车停下来的时候，捏刹车，需要施加与速度反方向的力。
红灯！！
这样，产生与速度方向相反的加速度（负的加速度），速度减小，从而自行车停下来了。
刹车并不是使加速度减小，而是产生负的加速度。
从这些知识可以得出力与加速度成比例关系。
早上好！
啊，早上……
原来如此！



现在来看重量的话题吧。
好大!?好重!?
当自行车上放有重物的时候，为了骑动自行车，需要很大的力气。
东倒
西歪
加速变得困难起来。
这样我们可以推出重量与加速度成反比。
抖……
重量用质量来表示，那么质量与加速度成反比。
重量与质量不一样吗？
简单来说，物体的重量是指这个物体受的重力的大小。
因此，同一个物体在地球上与在月球上的重量不一样。
那质量呢？


在无重力空间，物体的重量为0，要让物体运动，
必须施加力的作用。
……嗯？
在这种情况下，表示物体拥有的“阻止运动”的量就是质量。
咚！
看着相似，但意义有很大差别。
在这里总结一下！
ぼッ
好！
物体的加速度与物体所受的力成正比，与物体的质量成反比。
这就是牛顿第二运动定律。
哦哦！这个啊！
对那套衣服很满意？
嗯！



那么，把这个用公式来表示吧！
公式？
加速度 (acceleration) 用 *a* 表示，力 (force) 用 *F* 表示，质量 (mass) 用 *m* 表示。
$a = \frac{F}{m}$
就是这样的。
看这个式子，可以得到：力 *F* 变成两倍的时候，加速度 *a* 也变成两倍，质量 *m* 变成两倍的时候，加速度变成原来的 $\frac{1}{2}$。
よし、
$2 = \frac{2}{1}$
$1 = \frac{1}{1}$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
用公式一表示，马上就觉得有物理的感觉了！


ガチャ
ガチャ
而且，将这个公式变形。
也能这么表示。
ma=F
呃，那……
用文字表述的话
质量×加速度=力
是吧?!
对！
这个公式叫做运动方程式，比起语言和文字表示，这个公式能简洁且正确的表示出定律的特征。
不过，质量乘以加速度得到力，对这个没有直观印象呢！


确实，
难以换到用现实的
现象来表示。
对吧对吧？
不过，我们很自然的
使用力这个词语，
但在物理中要正确
表达力这个概念，
“力＝质量 × 加速
度”这个公式是很
重要的。
质量 × 加速度的
值能求出准确的
力的值？
嗯，
是这样的。
同样，
质量也可以根据
质量＝力/加速度
而求得。
啊啊啊——
来看一下实例
吧？
好！

计算准确的力的值

之前我们穿过滑冰鞋呢！那个时候的情景已经用摄像机拍下来了。

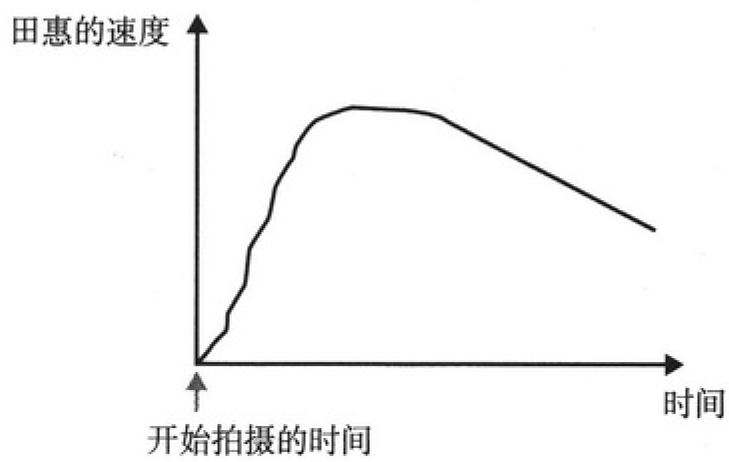


什么时候拍的……

我只是假定一下了。

哎呀，不要吓我嘛！那么，这跟今天的话题有什么关系？

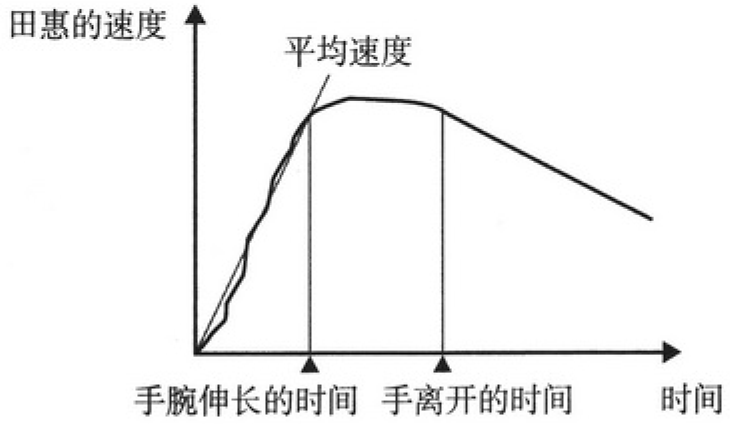
将这个摄像用电脑进行分析，看看速度与时间的图形。



从静止的状态，突然速度变得很大，然后速度又慢慢减小了呢！不过速度增加的比例看着不是一个定值呢！

这种情况下，画一条直线表示平均速度吧。

取出一段时间区间，在这个区间里，可以近似为做匀加速直线运动。



这样啊！

如果是匀加速直线运动，用加速度 = $\dfrac{速度的变化}{时间}$ 可以求出加速度，在这里得到由于我的手对二宫同学有力的作用而产生的加速度为 0.6m/s^2，将此乘以二宫同学的质量 40kg，得到：

$$力=质量\times加速度=40\times0.6=24\ (\mathrm{kg\cdot m/s^2})=24\ (\mathrm{N})$$

那么，我对二宫同学施加的力为 24N。这里 N（牛顿）是力的单位，1N ＝ 1 kg · m/s^2。

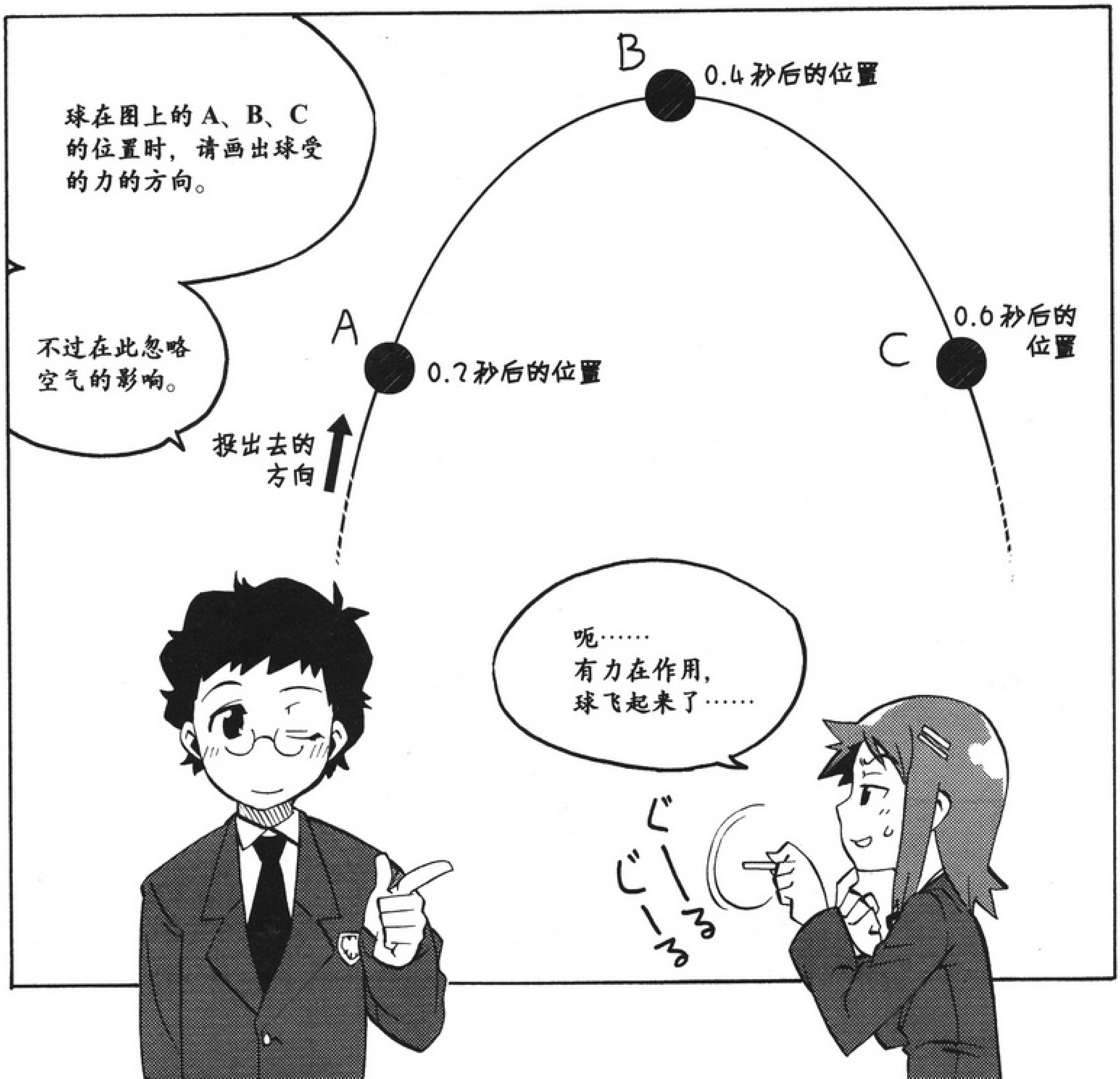
这样就求出了准确的力的值。

像这样，力能够通过由这个力对物体产生的加速度与物体的质量而求得。这种方法也能应用于其他力的测量。

投出去的球的运动


已经讲了力的定义……

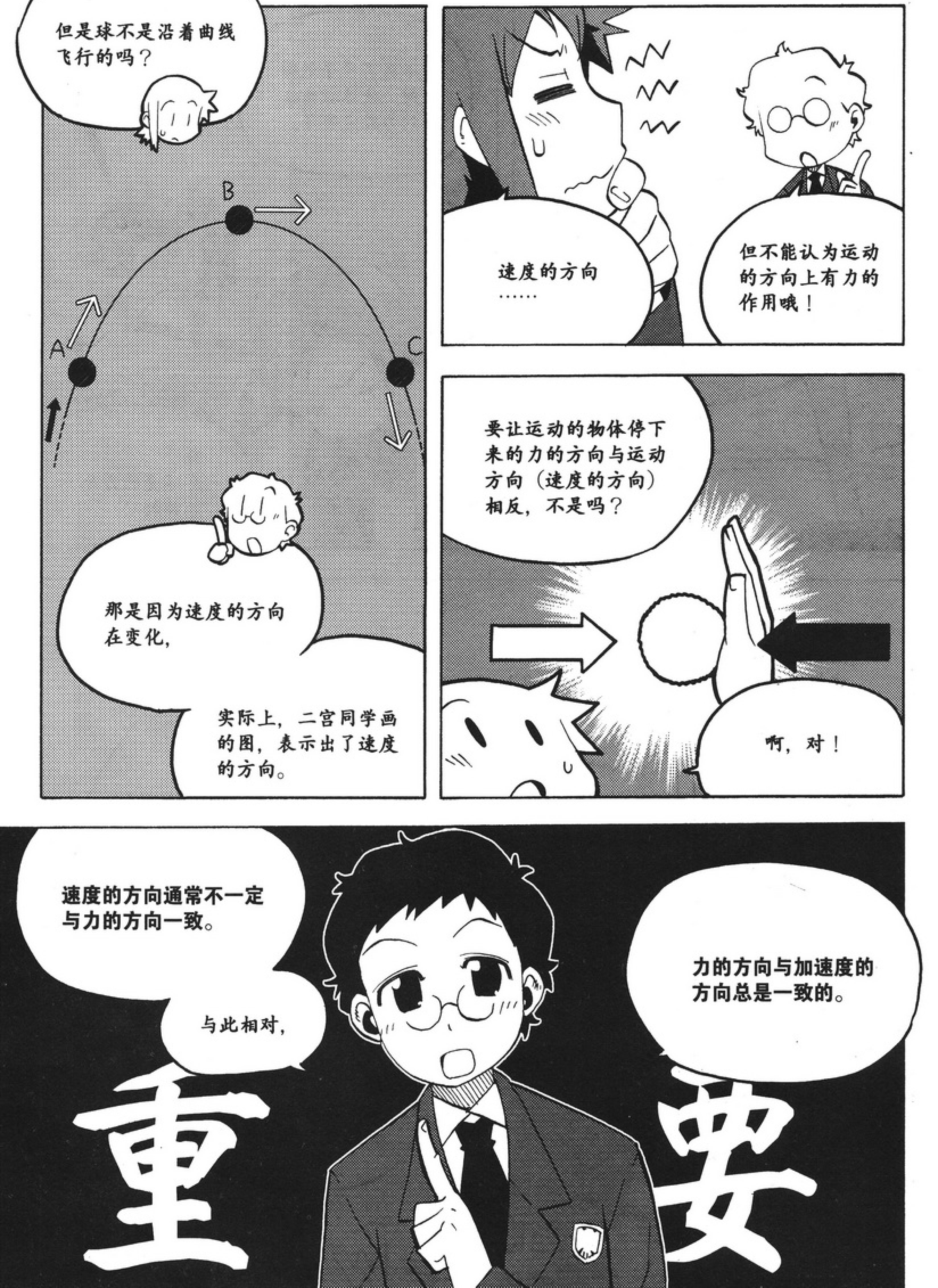

接下来，学习力的方向吧！
力的方向？
对，当投球的时候，施加在这个球上的力的方向。


球在图上的A、B、C的位置时，请画出球受的力的方向。
不过在此忽略空气的影响。
B
0.4秒后的位置
A
0.2秒后的位置
C
0.6秒后的位置
投出去的方向
呃……
有力在作用，
球飞起来了……


力应该是沿着物体运动的方向作用的，是这样吧？
B
A
C
啊——果然这样回答，这是不正确的……
啊！怎么有失望的感觉？
这个图中，球受的重力画在哪儿呢？
A
呃！准备画包含重力的合力……
那么，你在A点，画的重力以外的作用力，球朝斜上方运动……这个力在哪儿呢？
那个……不是手施加给球的力吗？



球在离开手的瞬间，使球投出去的力就没有了。
只是做个样子而已嘛——
又
饶了我不擅长运动啊——
呃？那球受的力是怎样的？
这是最大的误解！
哇噢！
这个，正确答案是这样的！
呃！只有重力！
B
重力
A
重力
投出去的方向
C
重力
对！所以作用力的大小和方向总是不变的。



但是球不是沿着曲线飞行的吗？
B
A
C
那是因为速度的方向在变化，
实际上，二宫同学画的图，表示出了速度的方向。
速度的方向……
但不能认为运动的方向上有力的作用哦！
要让运动的物体停下来的力的方向与运动方向（速度的方向）相反，不是吗？
啊，对！
速度的方向通常不一定与力的方向一致。
与此相对，
力的方向与加速度的方向总是一致的。
重
要



嗯？
这个……
我画的矢量全部
都是相同的大小，
用来表示速度的话，
大小不是应该不一
样吗？
发现了一个
好问题！
在观察球的运动
的时候，
ポ
发现球往上运动的
时候，
速度越来越慢，而
往下落的时候，运
动越来越快！
确实是这样呢！
为了知道速度的变化，
需要研究加速度，
球有由于受重力作用
产生的加速度。
是使物体从上往下
落的加速度呢！
ぽすん。


这个叫做重力加速度，用 g 来表示，顺便说一下，重力加速度大约等于 9.8 m/s²。
是个确定值？
实际上，在测量物体往下落时的加速度的时候，发现总是约等于 9.8 m/s²。
这样啊——
也就是说，重力产生的加速度与物体的质量无关，
加速度总是约等于 9.8 m/s²，方向向下。
由于有加速度，速度发生变化，用矢量表示出来是这个样子的。
加油哇～～


0.4秒后的速度
0.1秒内的速度的变化
0.3秒后的速度
0.5秒后的速度
0.5秒后的速度
0.2秒后的速度
0.1秒内的速度的变化
0.3秒后的速度
0.6秒后的速度
0.7秒后的速度
速度变化的方向就是受力的方向。
0.1秒内的速度的变化
由于加速度是速度变化的快慢，所以球的速度的变化总是为一个定值，且方向向下。
噢
通过做图发现，图上各点的速度在经过的时间内总是沿着向下的方向变化。
0.1秒后的速度
0.1秒时的速度
0.5秒后的速度
所以球往上运动的时候，速度越来越慢，往下落的时候速度越来越快。



由于重力加速度大约为9.8 m/s²。
1秒内速度变化约为9.8 m/s。
0.1秒内速度的变化约为0.98 m/s。
速度在沿着向下的方向变化。
力的方向与运动的方向不一致。
到现在为止，应该知道没有力的作用，球是飞不起来的。
要让静止的物体开始运动，需要有力的作用，而开始运动的物体，遵循惯性定律。
如果没有重力作用的话，投出去的球应该遵循惯性定律，沿着直线飞出去。
原来如此啊！


那么，
二宫同学，
已经明白日常生活中使用的“力”与物理中的“力”的细微差别了吗？
听了你的讲解，
大概已经清楚了！
这样，牛顿三大定律：惯性定律、运动方程式、作用力与反作用力定律的基本知识就讲完了。
太好了！
野野村同学的教学方法很通俗易懂呢！
这，
这没什么。


说力学是前面所说的三大定律……或者说是以这三个定律为基础建立的一点也不过分。
呃，这样说来是很了不起的定律呢！
接下来，准备讲动量的知识了。
就按照这个步调继续学习吧！
啊哈哈，好！
今天也讲得很晚了！
这两个人……
……他们总是在物理教室里学习吗？
好奇怪呢！

后 续

匀加速运动的三个公式

来看看物体沿直线做匀加速运动吧。物体在时刻 0 处的速度记为 v_0，时刻 t 处速度记为 v，还有时间 t 内行进距离为 x，物体的加速度为 a，有下面三个公式成立 ※。

$$v=at+v_0 \tag{1}$$

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

$$v^2-v_0^2=2ax \tag{3}$$

来解释一下这些公式的推导方法。首先，速度的公式（1）。加速度为一定值的时候有：

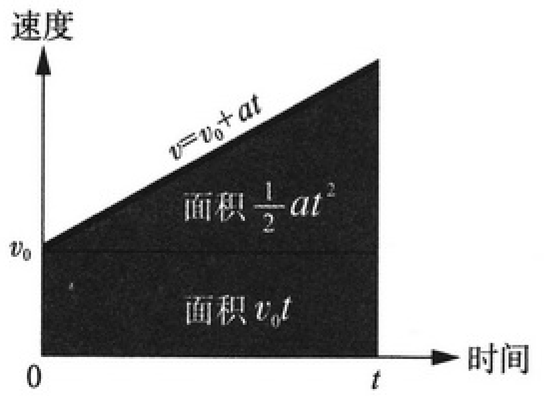
速度的变化 = 加速度 × 时间

速度的变化是 $v-v_0$，加速度是 a，时间为 t，因此根据速度的变化 = 加速度 × 时间得到：

$$v-v_0=at$$

从而推导出公式（1）。

接下来，推导位置的公式（2）。在第 57 页，学习了位移等于 v-t 图的面积。根据公式（1），v-t 图是这个样的：



根据这个 v-t 图的面积，来求行进的位移吧！v-t 图形中，下面的长方形部分的面积是

※ 严格地说，x 并不是“距离”，而是“位移”。当 $x<0$ 时，行进的距离用 $|x|$ 表示。

v_0t，上面三角形部分的面积是$\frac{1}{2}at^2$，因此（能求出梯形的面积）

$$x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

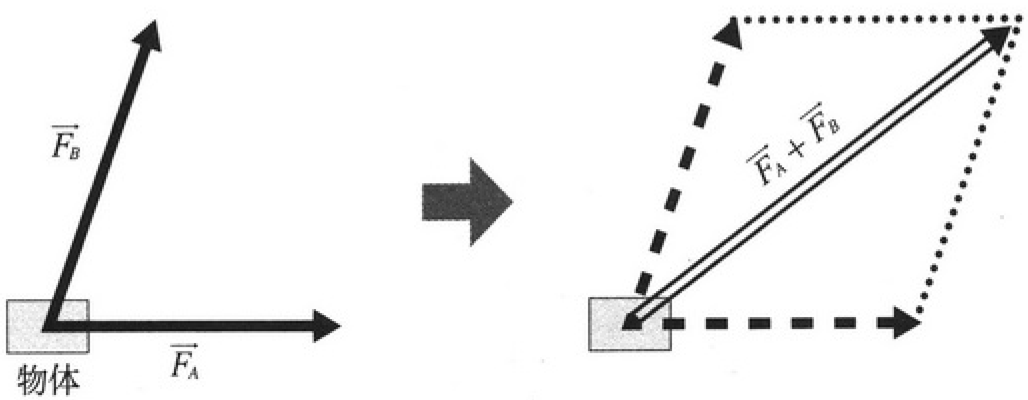
那么，公式（3）可以根据公式（1）和公式（2）去掉时间 t 而得到。实际上，根据公式（1）有$t = \frac{v - v_0}{a}$，将此代入公式（2）得到：

$$\begin{aligned} x &= v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 \\ &= \frac{(2v_0v - 2v_0^2) + (v^2 - 2v_0v + v_0^2)}{2a} \\ &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

两边同时乘以 $2a$，从而得到公式（3）。

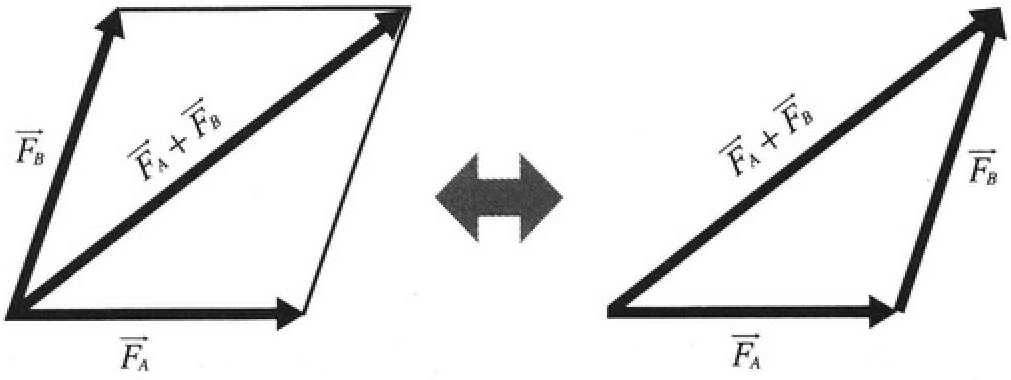
平行四边形定律

由于力是矢量，必须按照第 1 章介绍的矢量的规则进行计算。第 1 章已经详细解释了在同一条直线上的力的合力的计算。而不在同一条直线上力的合力的计算，则可以用平行四边形定律（参见第 64 页）来计算。



如上图所示，物体受到两个力$\overrightarrow{F_A}$和$\overrightarrow{F_B}$作用，这种情况，物体受的力等同于上面右图所表示的双线箭头表示的力。这个力其实是物体受的两个力的合力$\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B}$。合力的大小和方向，可以根据第 1 章介绍的矢量的加法来确定。下面的右图，表示出了合力。下面右图的$\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B}$，

等于左图的以两个矢量$\overrightarrow{F_A}$和$\overrightarrow{F_B}$为相邻边的平行四边形的对角线，因此平行四边形定律成立。

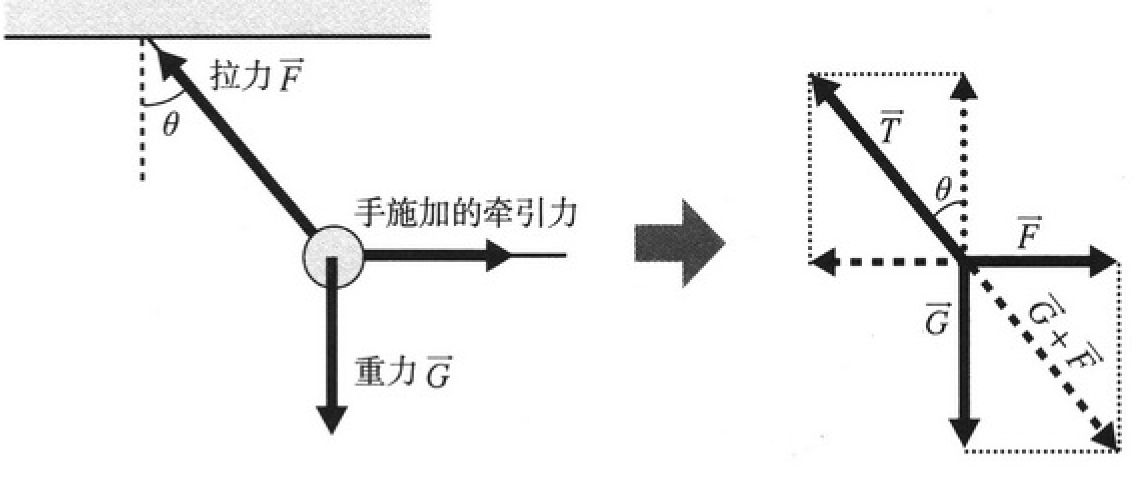


上面所说的,并不局限于力,适用于一切矢量的合成（加法）。也就是说,两个矢量的合成,都可以采用平行四边形定律来求。

另外，在同一条直线上的两个矢量的合成，可以将平行四边形的两条边看成处于平行的极限状态，也适合用平行四边形定律。而且，三个以上的力的合成，也可以重复采用平行四边形定律来求。

力的合成与分解

由于力是矢量，因此可以根据矢量的和的规则做加法运算。这个叫做力的合成。相反，为了使问题简单化，也可以将一个力矢量分解成两个或两个以上的力来考虑，这个叫做力的分解。



来详细研究一下挂在天花板上的重物受水平方向的牵引力时的力的平衡（参见第63页），如上面右图所示，重力、水平方向的牵引力、橡皮筋的拉力分别用$\overrightarrow{G}$，$\overrightarrow{F}$，$\overrightarrow{T}$表示。

由于重物处于静止状态，那么这三个力平衡。因此，这三个力做矢量的加法运算，得到的合力为 0。

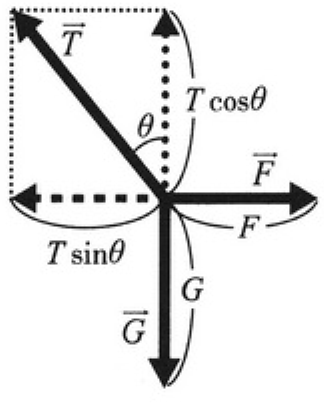
$$\overline{G}+\overline{F}+\overline{T}=0$$

换一种表示方法：

$$\overline{G}+\overline{F}=-\overline{T}$$

这个式子表示，重力$\overline{G}$与水平方向的牵引力$\overline{F}$合成的矢量$\overline{G}+\overline{F}$，与拉力$\overline{T}$大小相等，方向相反。

现在，不用矢量表示，只用力的大小来表示力的平衡关系会怎样的呢？重力的大小$|\overline{G}|=G$，水平方向的牵引力的大小$|\overline{F}|=F$，拉力的大小$|\overline{T}|=T$，橡皮筋与竖直方向的夹角为θ，



根据水平方向的力的平衡得到：

$$F=T\sin\theta$$

根据垂直方向的力的平衡得到：

$$G=T\cos\theta$$

根据这两个式子消去 T 得到：

$$\tan\theta=\frac{F}{G}\quad 即\quad F=G\tan\theta$$

像这样，如果知道重力的大小 G 和橡皮筋的角度 θ，就能求出重物受的水平方向的牵引力的大小 F。

没有力作用的状态与牛顿第一运动定律

牛顿第一运动定律的内容是：没有力作用的物体保持静止或匀速直线运动状态。这里的“没有力作用”是指合力为 0 的意思。物体虽然受到各种不同的力的作用，但是如果这些力的矢量合成的结果等于 0，这种情况也叫做“没有力作用”。无重力状态下的宇宙中的漂浮物体，如果不受任何力的作用，那个物体将永远保持静止或匀速直线运动状态。另一种情况，桌子上放着的静止的物体，受到重力的作用，但是，同时物体也受到桌子对它的垂直方向的支持力，因为合力为 0 物体而处于静止状态。

有力作用的状态与牛顿第二运动定律

某个物体受到力的作用，那么物体将以与力成正比的加速度运动。由于力与加速度都是矢量，因此它们之间的关系是矢量的关系。物体受的力的矢量用 $\vec{F}$ 表示，物体的加速度的矢量用 $\vec{a}$，物体的质量用 m 表示，第二运动定律（运动方程式）可以表示为：

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

质量是只有大小的量，也就是标量。来重点关注一下加速度和力的方向吧！根据第一运动定律，只要物体不受到力的作用，物体将保持做直线运动。因此为了改变物体的运动方向，需要对物体施加力的作用。运动方程式表示出了物体的运动方向随着力的作用如何变化的情况。

因此，p51 中出现的沿着正方形轨道运动的无线遥控车，在沿某条直线边运动时，由于是匀速直线运动，所以力（合力）为 0，不过，在直角转弯的地方，在那个短时间内其实有不为 0 的力的作用（以自行车为例，就是沿轮胎方向产生的力），应该做加速度运动。如果没有那个加速度，速度的方向肯定不会产生曲线变化。

还有，第 68 页中的自行车例子，为了理解“加速度的大小与力的大小成正比关系，与物体的质量成反比关系”的内容，采用了身边的例子，不过力的方向与加速度的方向的关系是很复杂的。踩踏板做圆周运动，轮胎由于链条的传动作用也做圆周运动，自行车利用轮胎与地面之间的摩擦力作用向前运动，所以力与运动之间的转换关系很复杂。

速度、加速度、力的方向

根据第二运动定律，加速度的方向肯定是与力的方向是一致的。而速度的方向，与力和加速度的方向没有直接的对应关系。根据加速度与速度的关系（第 52 页）有：

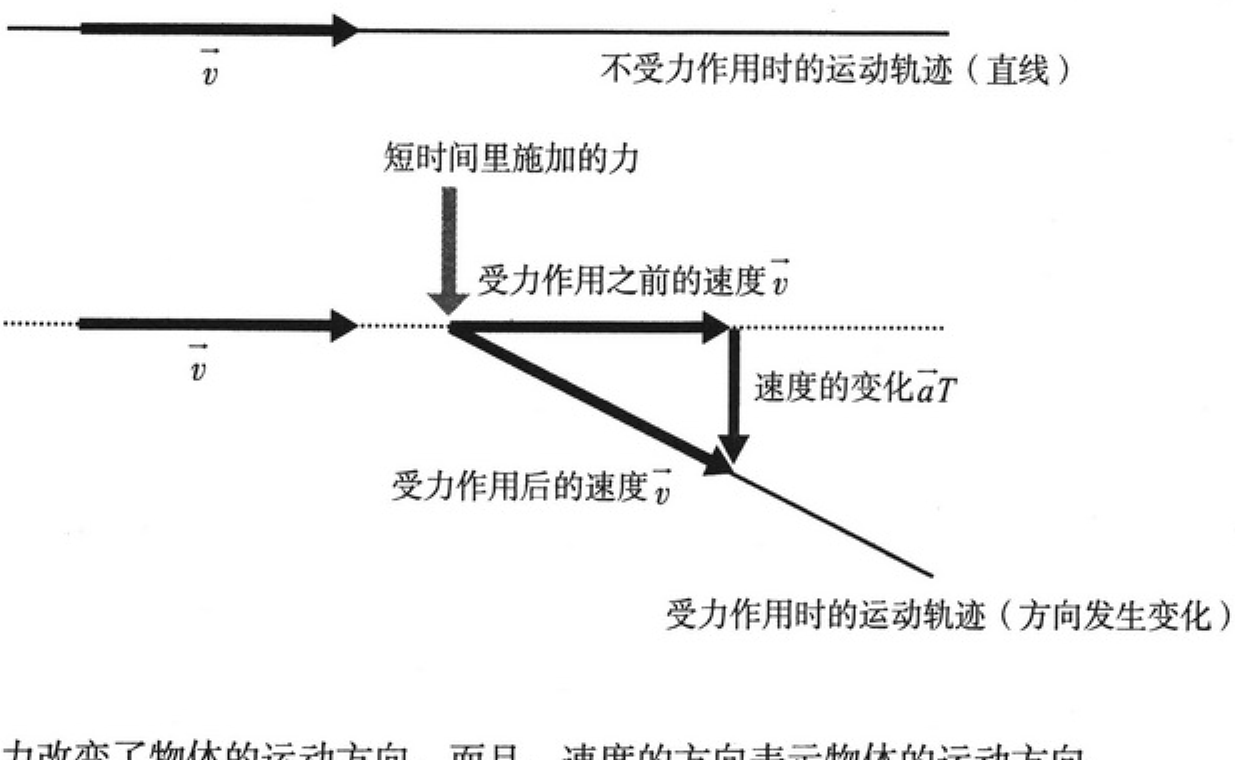
速度的变化 = 加速度 × 时间

也就是说，速度的变化方向与加速度的方向是一致的。

来研究一下具体的例子吧。以一定的速度 $\vec{v}$ 运动的物体，如果没有力的作用，根据第一运动定律，那个物体将做速度为 $\vec{v}$ 的匀速直线运动。对那个物体在垂直方向施加短时间 T 的力，速度会如何变化呢？那个力产生的加速度用 $\vec{a}$ 表示，受力作用后的速度用 $\vec{v}'$ 表示，根据上面的式子得到：

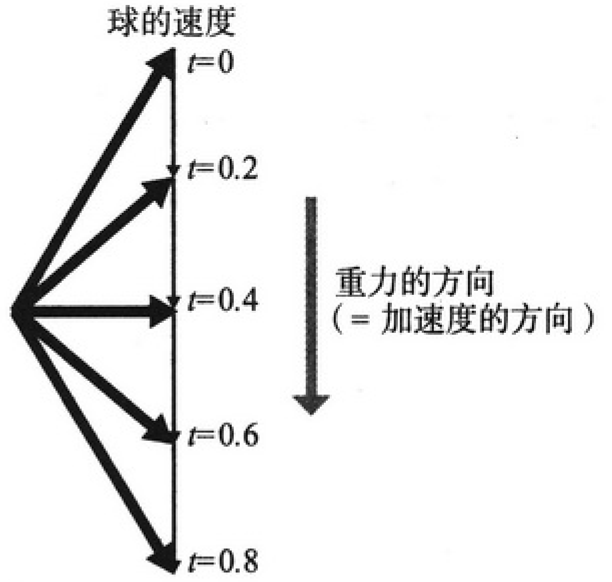
$\vec{v}' - \vec{v} = \vec{a}T$ 也就是 $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{a}T$

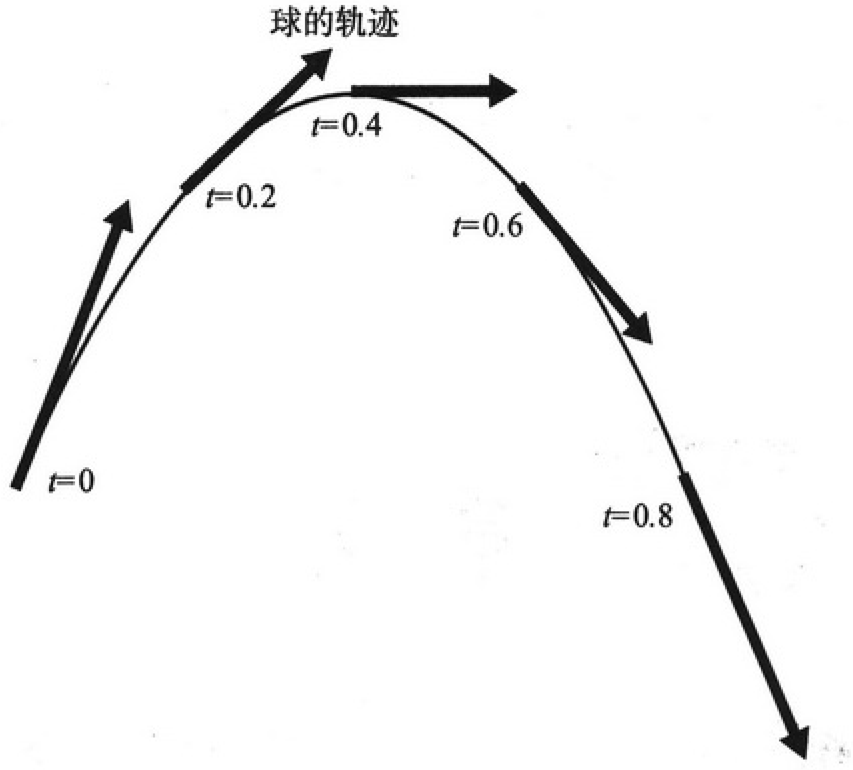
这样，受力作用后的速度就表示出来了。



像这样，力改变了物体的运动方向。而且，速度的方向表示物体的运动方向。

第 77 页研究了投出去的球的运动，重力对球有持续作用。由于重力的方向一定，总是竖直向下，因此速度的变化的方向也总是竖直向下。也就是说，球的速度，在水平方向的大小保持大小不变，只有垂直方向的速度以一定的比例向下变化（如下图右侧所示）。轨迹将速度的方向连接起来，是如图所示的抛物线的形状。





物体对自己没有力的作用

没有学过力学的人，一般都会认为“运动的物体对自己有力的作用”。这当然是错误的。第 1 章的时候学习过，力总是成对出现的，是相互作用的，运动的物体不会自己产生使自己运动的力。

例如，来看一下往上投的球的运动。球从手中直到脱离手的瞬间，一直受手施加的力的作用（这个力的反作用力是球对手施加的力，这个力跟球的运动没有关系）。离开手的球只受到地球对它的重力作用。不能认为手对它的作用力在离开手之后还存在。

力的单位 N（牛［顿］）

力的单位是根据运动方程式决定的。

力 = 质量 × 加速度

其中，质量的单位是 kg，加速度的单位是 m/s^2，因此

力的单位 = 质量的单位 kg× 加速度的单位 m/s^2= kg m/s^2

力在物理中是很重要的量。

1N（1 牛顿）$=1\text{kg}\ \text{m/s}^2$

为了表示力的大小，使用的单位为牛顿。单位名称是纪念建立了力学基础的物理学家牛顿。1 牛顿的力等于使质量为 1kg 的物体产生 1m/s^2 的加速度所需要的力。

提 高

质量和力是如何确定的

物体的质量是如何确定的呢？物体的质量可以用天平测量而得到，不过，天平也是了利用物体受的重力与质量成正比这个关系确定。利用重力测量的质量，叫做重力质量。我们测量物体的质量的时候，通常是利用重力的秤，因此都是测量的重力质量。

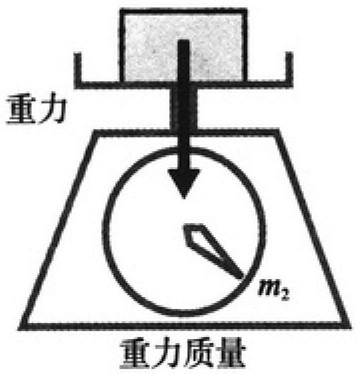
然而，根据运动方程式，质量是阻止物体加速的物理量，与重力没有直接的关系。运动方程式中的质量（质量 = 力 ÷ 加速度）叫做惯性质量。

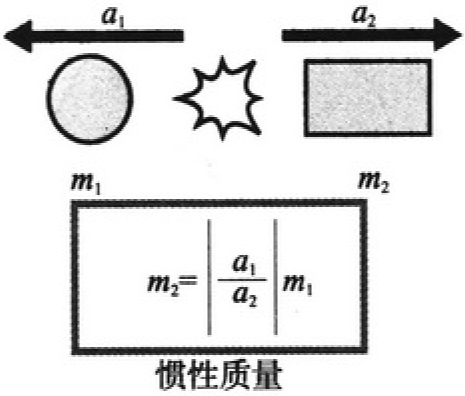
惯性质量，可以根据运动方程式和作用力与反作用力定律的组合而进行测量。首先，准备作为质量的大小的基准的物体（叫做基准物体）。然后，将需要测量质量的物体（叫做待测物体）与基准物体，在没有外力作用的情况下进行撞击。这个时候，基准物体与待测物体相互之间的作用力符合作用力与反作用力定律，因此根据二者的运动方程式可以消去力得到：

$$\begin{aligned}&\text{基准物体的质量}\times\text{基准物体的加速度的大小}\\=&\text{待测物体的质量}\times\text{待测物体的加速度的大小}\end{aligned}$$

有这样的关系式成立。将基准物体的质量定为 1，那么：

$$\text{待测物体的质量}=\frac{\text{基准物体的加速度的大小}}{\text{待测物体的加速度的大小}}$$





物体的加速度可以通过在实验中测量物体行进的位移和时间而求得，因此，这些物理量确定以后，待测物体的惯性质量就能求出来了。

在实验中我们已经知道了惯性质量与重力质量相等，不过这个现象的原因在牛顿力学范围内仍是个谜。爱因斯坦以惯性质量＝重力质量这个关系为基本原理建立了重力的理论（广义相对论）。爱因斯坦的这个重力理论取得了巨大成功，它也是基于惯性质量与重力质量相等这个基本原理。现在，惯性质量与重力质量相等可以用精确度很高的实验来进行确认。另外，作为质量基准的物体，是法国的国际计量局保管的国际千克标准，将那个物体的质量定义为1kg。

质量确定了的话，现在就能确定像第 75 页中的那些力的大小了。也就是说，对于质量已知的物体，施加需要测量的力的作用，这个力对物体会产生加速度，测量这个加速度的值，将这些值代入：

质量 × 加速度 = 力

从而能求出力的值。

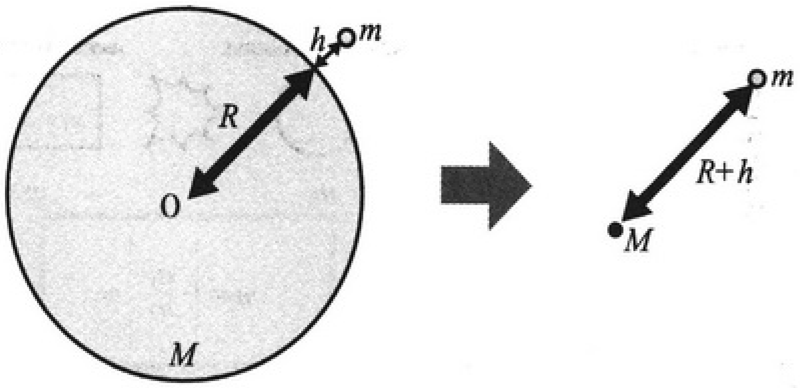
重力的大小

质量为 m 的物体受到地球的重力的大小为：

$$F=mg$$

其中，g 是重力加速度的大小，地球表面的重力加速度 g 近似为 $9.8m/s^2$。这个式子是根据万有引力的表达式推导出来的。

如下图所示，来研究地球与距地表高度为 h 的质量为 m 的物体之间的万有引力。



将地球假定为一个半径为 R、质量为 M 的密度均匀的球体，将地球的所有质量 M 集中到地球的中心，可以证明，地球对地球表面的物体的重力都相等。地球对物体的重力的大小为：

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

特殊情况，地球表面附近（$h = 0$）的物体受到的重力是：

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

在此，

$$G\frac{Mm}{R^2} = g$$

因此，

$$F = m\left(G\frac{M}{R^2}\right) = mg$$

地球的半径约为 6.38×10^6m，地球的质量约为 5.98×10^{24}kg，将这些值代入计算 g：

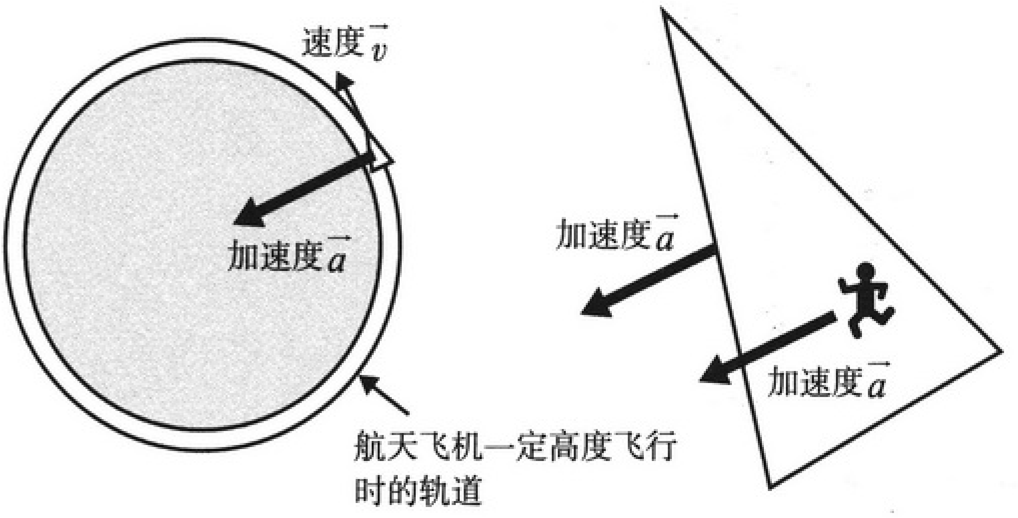
$$g = G\frac{M}{R^2} = 6.67\times10^{-11}\times\frac{5.98\times10^{24}}{(6.38\times10^6)^2} \approx 9.8\text{m/s}^2$$

这就是重力加速度的值。严格来说，地球并不是密度均匀的球体，因此地球表面的重力加速度根据地点不一样而有微小变化。但是取最大值和最小值平均近似为 9.8m/s^2。

顺便说一下，航天飞机在离地球表面某一个高度绕地球旋转，重力加速度的大小又是怎样的呢？航天飞机离地表的高度大概为 300 ～ 500km。在此以 $h = 500$km 为例，$R+h=6.38\times10^6+0.5\times10^6=6.88\times10^6$m，用这个值：

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2} = 6.67\times10^{-11}\times\frac{5.98\times10^{24}}{(6.88\times10^{6})^2} \approx 8.4\text{m/s}^2$$

也就是说，航天飞机一定高度飞行时与在地表时相比，8.4/9.8 = 0.86，只受到 86％的重力。由于航天飞机的飞行高度只大约为地球半径的 1/10，因此它还是受到很强的地球的重力作用。



那么，为什么航天飞机中的物体能像处于无重力空间一样呢？那是因为，航天飞机利用了地球的重力产生的加速度的原因。爱因斯坦研究过“与吊绳断开而往下落的电梯中的人，自身处于无重力空间”，航天飞机也是，像与吊绳断开而往下落的电梯一样，万有引力产生指向地球中心的加速度。只不过，不是竖直向下运动，由于速度方向总是与重力方向垂直，因此航天飞机在地球周围沿圆形轨道（一般为椭圆轨道）做圆周运动。不止是航天飞机，其内部包括航天员所有物体，都以相同的加速度在做圆周运动，因此相对来看，其内部的物体处于无重力空间一样。

投出去的球的运动

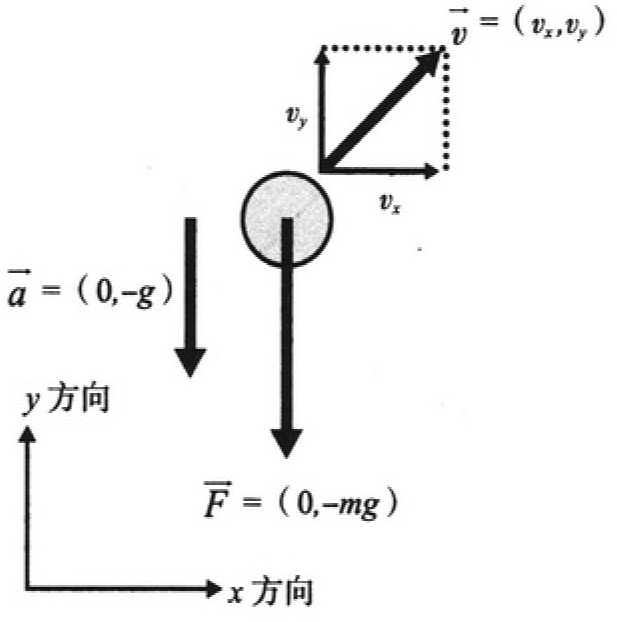
第 83 页中研究了投出去的球的运动。在此，用公式来研究一下投出去的球的运动吧。

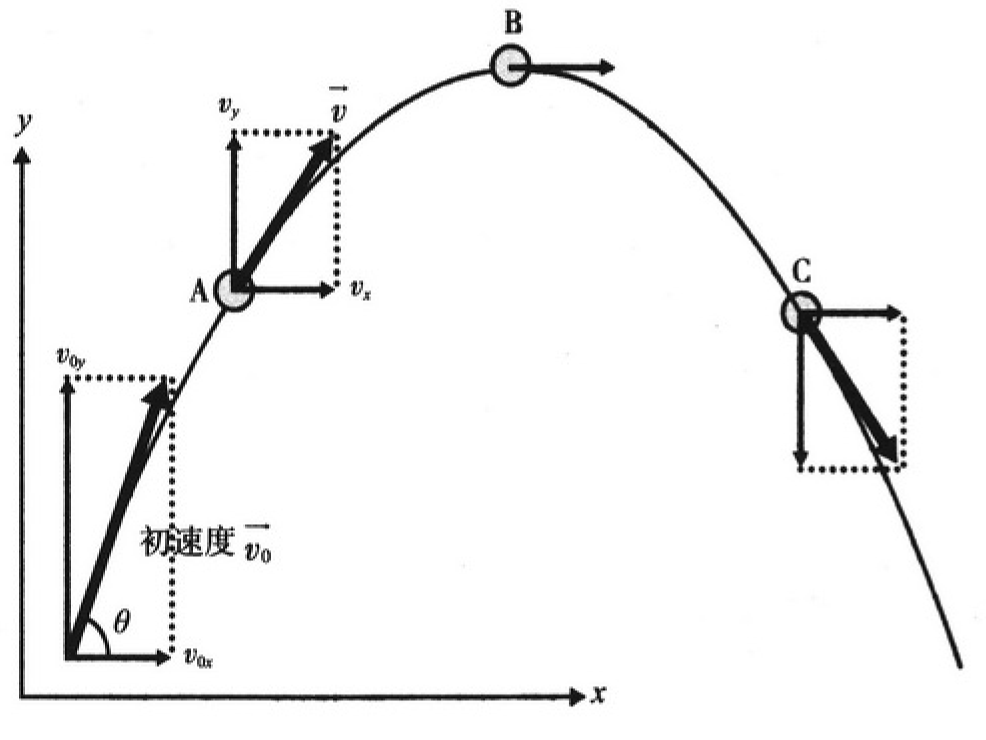
如下页图所示，水平方向以 x 表示，垂直方向以 y 表示，球的质量表示为 m。球受的重力沿 y 方向向下，大小为 mg。这个物理量用矢量来表示得到：$\vec{F} = (0, -mg)$ 。与此相对应的加速度表示为：$\vec{a} = (a_x, -a_y)$。运动方程式 $\vec{F} = m\vec{a}$，分开在 x 方向和 y 方向表示出来：

可以表示为：

$ma_x=0$

$ma_y=-mg$





根据上式得到：

x 方向的加速度：$a_x=0$

y 方向的加速度：$a_y=-g$

也就是，x 方向做匀速直线运动，y 方向做匀加速运动。知道了加速度，就可以求出速度了。以最初投球的时刻为 $t=0$，这时的速度为 $\vec{v_0}=(v_{0x}, v_{0y})$。

根据公式（1）得到：

$$v_x=v_{0x}$$

$$v_y=v_{0y}-gt$$

根据这个公式来研究速度的变化，可以知道，x 方向的速度不变，y 方向上，每秒速度沿着向下的方向变化 $g\times 1=9.8\text{m/s}^2\times 1\text{s}=9.8\text{m/s}$。

接下来，来看看位置吧。回忆一下匀加速运动的公式（2）：

$$x=v_{0x}t$$

$$y=v_{0y}-\frac{1}{2}gt^2$$

根据上面两个公式消去 t，那么可以求出投出去的球的运动轨迹：

$$y=v_{0y}(\frac{x}{v_{0x}})-\frac{1}{2}g(\frac{x}{v_{0x}})^2$$

它是一个二次函数，因此可以知道轨迹为抛物线。只不过是以投出去时的位置为原点。

根据这个公式，来求球在哪儿着地。实际上公式可以变换成：

$$y=\frac{x}{v_{0x}}(v_{0y}-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}}x)$$

球着地的位置为，当 y 为 0 时的除 0 以外的 x 值，因此：

$$v_{0y}-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}}x=0$$

得到：

$$x=\frac{2v_{0y}v_{0x}}{g}$$

更进一步，将上面的公式用球投出去的角度 θ 的方式表示，可以求出以一定速度投出去的球，以什么角度投出去投得最远。初速度可以表示为：

$$\vec{v_0}=(v_{0x},v_{0y})=(v_0\cos\theta,v_0\sin\theta)$$

将此代入着地地点位置的公式得到：

$$x=\frac{2v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

为了使 x 值最大，应该使 $\sin 2\theta=1$，在投出去的速率相同的情况下，以 $\theta=45$ 的方向投出去，球飞得最远。

速度、加速度与微积分

一般来说，物体的速度随时间而发生变化。在这种情况下，在很短的时间 Δt 内可以认为速度为定值，近似为：

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{4}$$

这里，Δx 为物体在时间 Δt 内产生的位移。式（4）中，将 Δt 看成是很小的值，在 Δt 内速度可以近似为一定值。实验中 Δt 肯定是有一定的大小的，因此只能求出平均速度。不过，从数学角度考虑，可以看成是 $\Delta t\to 0$ 的极限。瞬时速度：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

这是瞬时速度的定义。

对于加速度，也可以采用相同的方法定义。在微小时间 Δt 内将速度的变化看成一个定值 Δv，那么加速度为：

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{6}$$

对于加速度不为定值的场合，Δt 取趋向于 0 的极限值，得到：

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

得到了瞬时加速度的表达式。另外，将公式（5）代入公式（7）中得到：

$$a=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \tag{8}$$

也就是说，加速度是位移的二次微分。

将加速度以微分的表示方式，代入运动方程式 $ma=F$：

能这样表示：

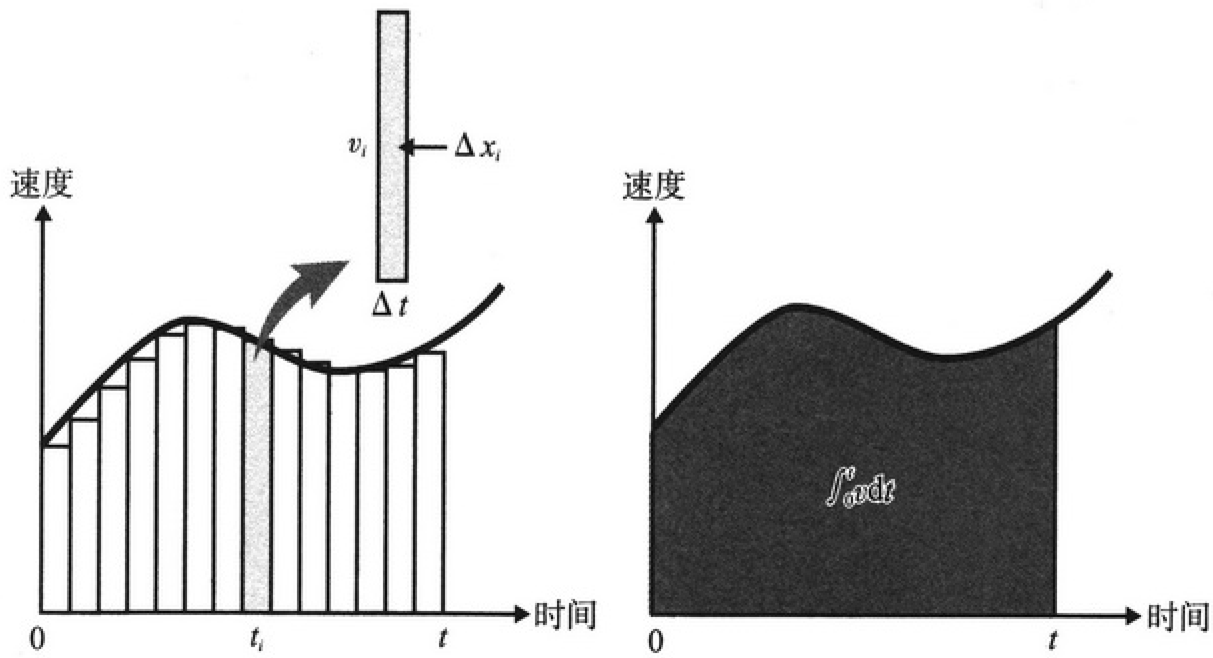
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F \quad \text{也就是} \quad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F \tag{9}$$

v-t 图形的面积与位移

接下来，来从速度求位移吧（第 55 页的实验室）。速度为一定值的情况下根据公式（4）得到：

$$\Delta x=v\Delta t \tag{10}$$

因此可以求出时间 Δt 内物体移动的位移 Δx。



速度不为定值的情况下，如图所示的微小时间 Δt 内物体的位移可以根据公式（4）求出，将这些结果加起来而得到位移的近似值。即，时刻 0 到时刻 t 的时间区间分为 n 个区间，其中第 i 个时刻表示成 t_i，这个时刻的速度用 v_i 表示。以速度 v_i 在微小时间 Δt 内前进的位移为 Δx_i：

$$\Delta x=v\Delta t$$

从时刻 0 到时刻 t 物体行进的位移为：

$$\begin{aligned} x &= v_0\Delta t+v_1\Delta t+\cdots+v_i\Delta t+\cdots+v_{n-1}\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} v_i\Delta t \end{aligned}$$

可以近似求出 x 的值。当长方形的宽度 Δt 趋向于极限 $\Delta t \to 0$ 时(这时 $n \to \infty$),将不存在误差,这时：

$$x = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} v_i \Delta t = \int_0^t v \mathrm{d}t \tag{11}$$

可以得到，位移可以通过求 v–t 图形的面积表示的积分求得。

运用公式（11），来推导一下第 87 页中的匀加速直线运动的位移的公式（2）吧。加速度为 a 的匀加速运动，时刻 $t = 0$ 时的速度为 v_0，时刻 t 时的速度用 v 表示，根据公式（6）得到：

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

根据这个可以直接求出公式（1）的 $v=v_0+at$。将公式（1）代入公式（11）得到：

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t (v + at)\mathrm{d}t \\ &= \left[v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right]_0^t \\ &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

从而推导出了公式（2）。

第3章 动量



1. 动量与冲量

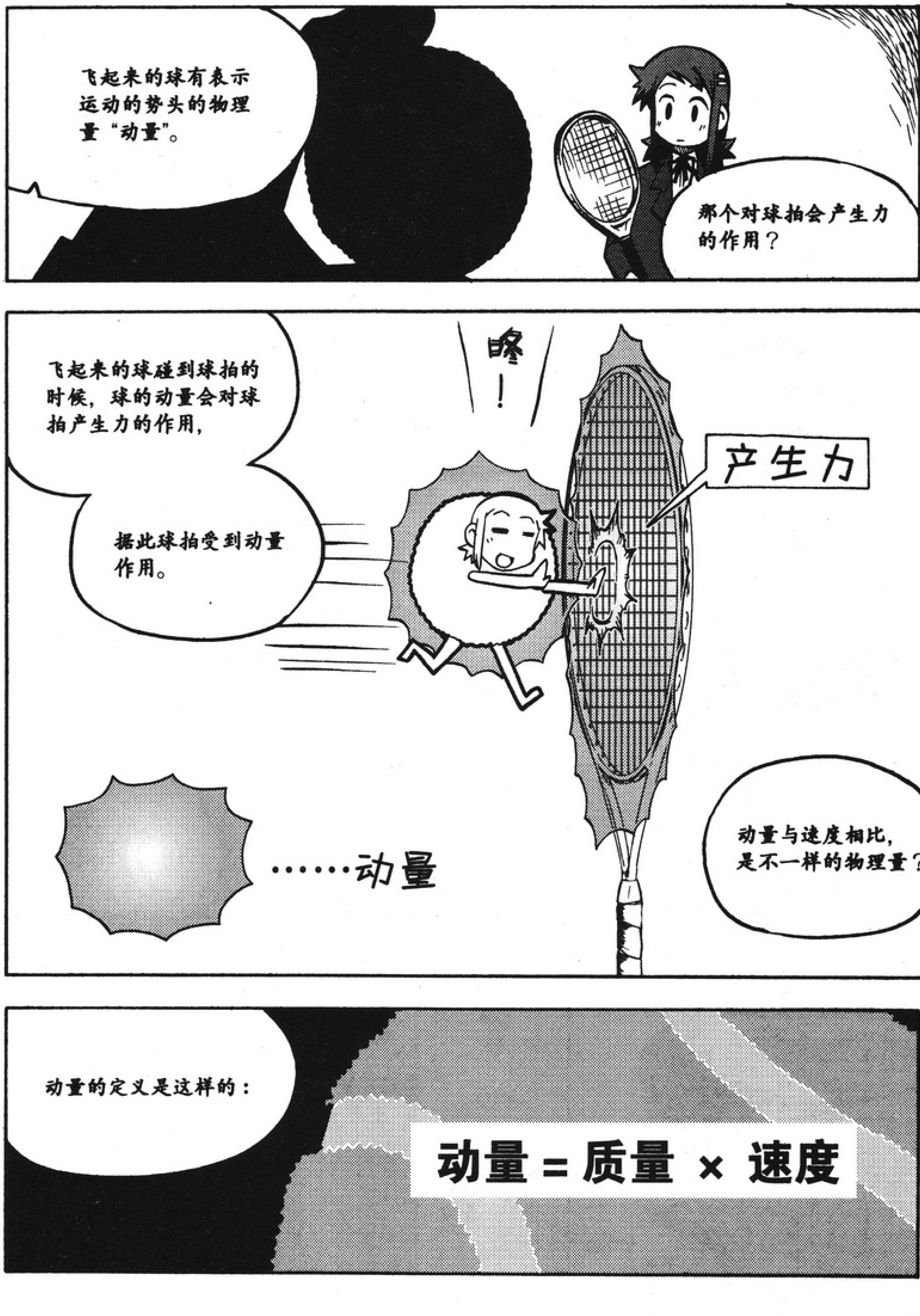

田惠！
回家太早，去吃蛋糕吧？
赞成！
啊——不好意思，
今天我就不去了，待会还有事情！
那样啊？好可惜……
最近好像很用功呢！
むぎゅ
没……没有了。
哼……



我……
我都知道了！
呃？
总……
总而言之，
你也好好练习
打网球吧！
那可是我自己的
事情！
ビッ!!
什么……
下次比赛肯定
是我赢！
在努力练习呢！
怎么了？
喂……
难道说，
早矢香知道我
和野野村同学
学习的事情了
……

如何表示运动的趋势


那么，
又要和早矢香
同学比赛了？
对！
这次绝对不会
输给她了！
这可是很重要
的比赛呢！
现在先不说
这个，
飞起来的球不能
产生力的作用吧。
哈哼
但是，
球与拍子接触的时候，
手能感觉到力的作用
吧？
感觉到有接
到什么东西
一样!!
这个……
不是球对拍子产生了
像力的作用的物理量
吗？
哦，
值得关注！


飞起来的球有表示运动的势头的物理量“动量”。
那个对球拍会产生力的作用？
咚！
飞起来的球碰到球拍的时候，球的动量会对球拍产生力的作用，
产生力
据此球拍受到动量作用。
……动量
动量与速度相比，是不一样的物理量？
动量的定义是这样的：
动量＝质量×速度



如果说运动的趋势，我觉得用速度表示就行了……
还要乘以质量吗？
请仔细思考一下。
以相同的速度运动时，
网球和乒乓球，球拍受到的力是不一样的。
……确实是这样，如果是乒乓球的话，打着头了也不疼。
什么！?
难道你还怀恨在心……
漫画刑事物理系
"网球场的杀人事件!!死者头部有不明创伤。"
这里，这里有巨额遗产……
没有没有没有，肯定不会啦！?
球太大了!!
那也是因为看到二宫同学一个人在收拾球场，觉得很辛苦才去帮忙的……
对不起，对不起，开玩笑的啦！
……野野村同学，有点固执呢！
没有那回事！
又固执了……

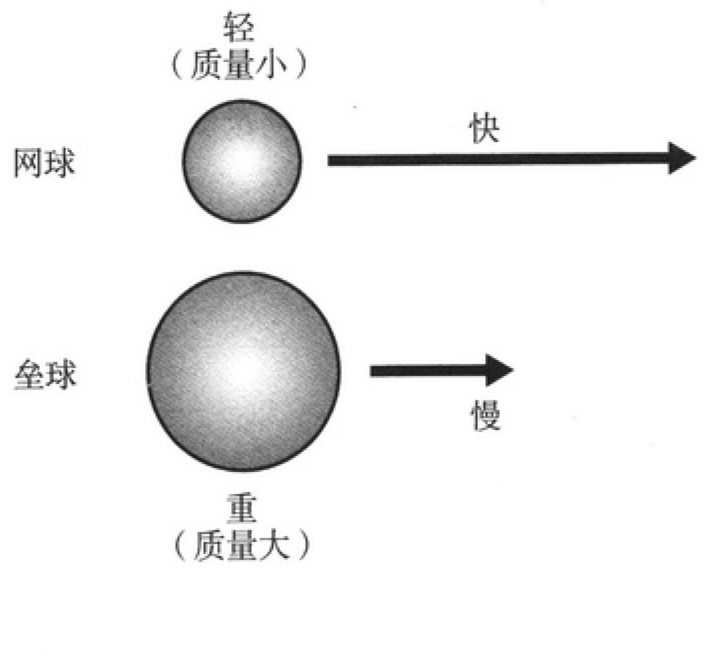
随质量变化的动量的差别

由于网球与乒乓球的质量有很大差别，为了便于理解，准备了垒球。



被垒球打中了可就糟了……

来研究一下，慢慢投出的垒球的动量和快速投出去的网球的动量。用图表示是这样的。



呃，与网球相比，垒球要重很多呢！

可以知道它们的质量与速度关系如下：

垒球的质量＞网球的质量

垒球的速度＜网球的速度

不过，它们的动量的关系，也就是：

垒球的质量 × 速度 vs 网球的质量 × 速度

这个大小关系，如果不知道具体数值的话也没法确定呢！

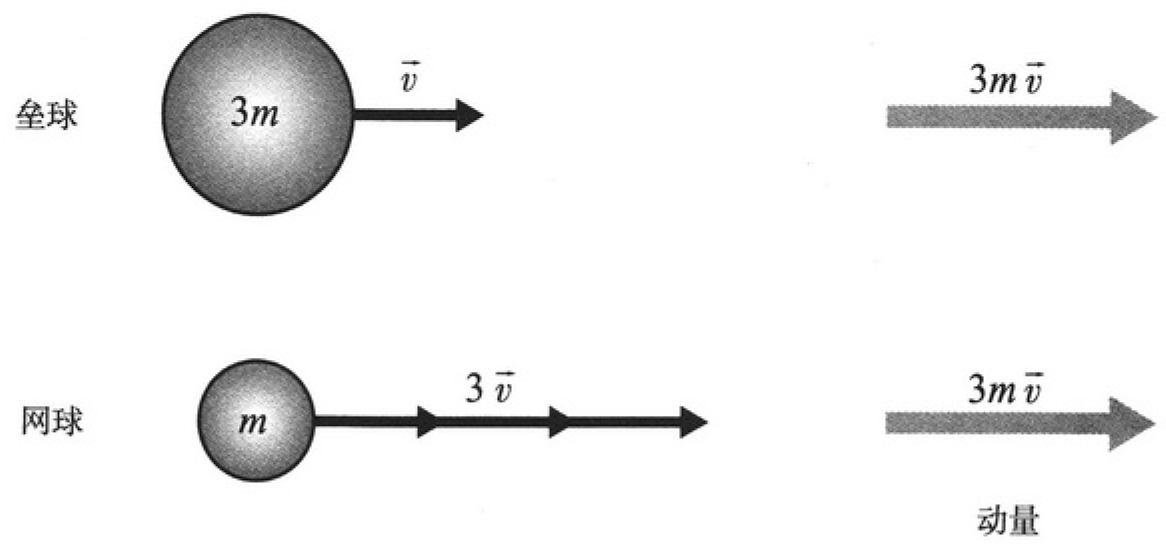
对啊！我觉得网球的质量大概是 60g 吧。

垒球的质量大概是 180g。

那么，60：180，垒球的质量是网球的质量的三倍呢！

那么，由于有“动量 = 质量 × 速度”这样的关系，当网球的速度是垒球的速度的三倍的时候，二者的动量就相等了。

原来如此！



动量的变化与冲量

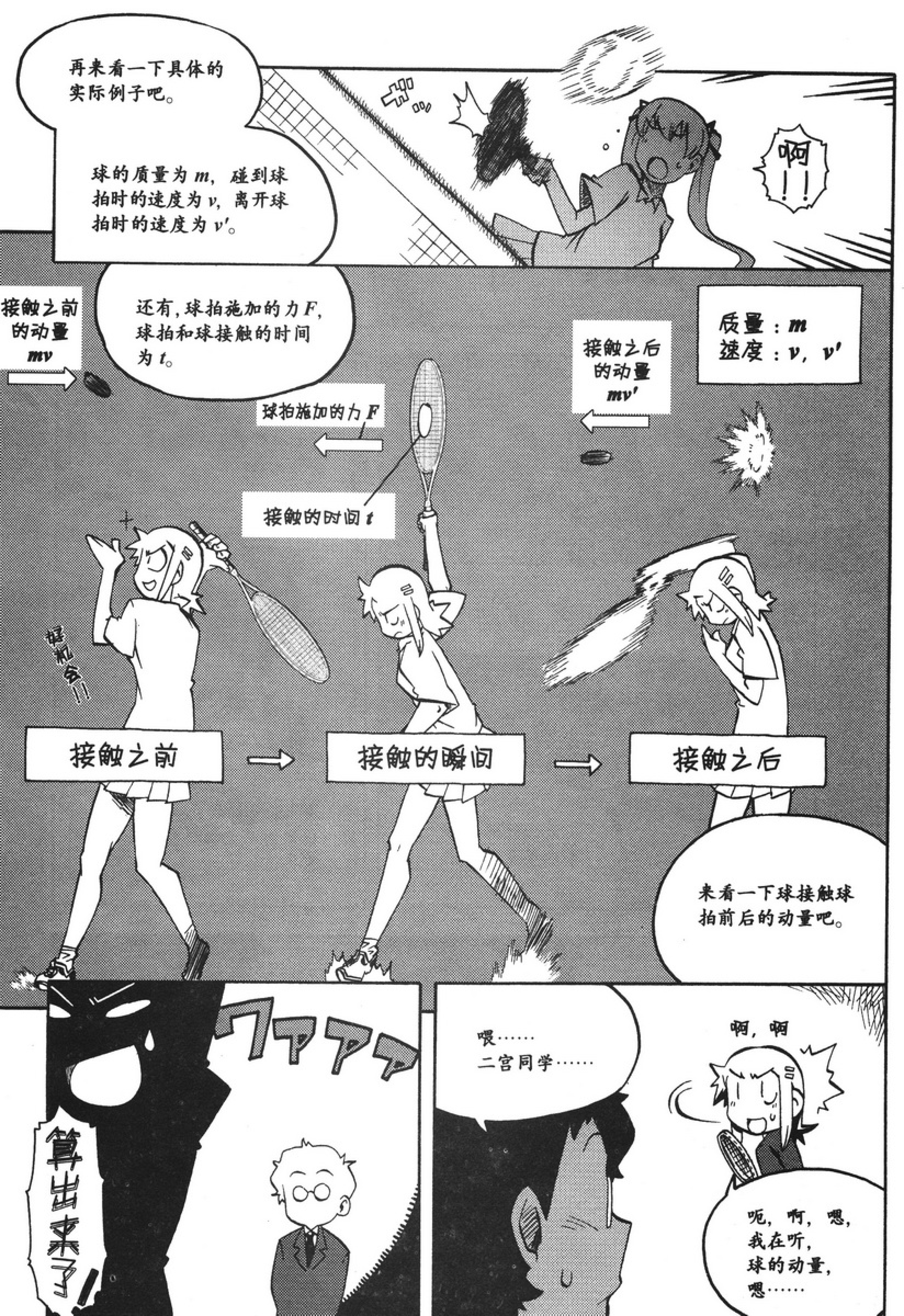

由于球有动量，
因此对球拍会产生
力的作用，
这个概念掌握
了吗？
嗯，
清楚了！
撞到球拍的球之后将
以另一个速度飞出去
……
也就是说，
球的动量发生了
变化。
ガラガラ
ガラ
关于那个动量的变化，
来用运动方程式研究一
下吧。



呃……
运动方程式是
这样的。
质量×加速度=力
对，
那么由于“加速度
=速度的变化÷
时间”。
速度=
将此代入运动方程式
中变成这样了：
质量×速度的变化/时间=力
呃……
这样。
くるんっ
将公式变换一下变
成这样了。
知道是怎样
变换吗？
质量×速度的变化=力×时间
ばん！
啊，
两边同时乘以
时间呢！



由于“动量＝质量 × 速度”，
“质量 × 速度的变化”可以看成是“动量的变化”。
原来这样啊！
因此，有下面这个公式成立。
动量的变化＝力 × 时间
力乘以时间的话，就表示动量的变化！
这个“力 × 时间”叫做“冲量”……换种说法。
有“动量的变化＝冲量”，物体的动量根据冲量而发生变化。
球与球拍接触的时间，由于冲量，动量发生变化……
就是这样的。



再来看一下具体的实际例子吧。
球的质量为 m，碰到球拍时的速度为 v，离开球拍时的速度为 v'。
啊!!
还有，球拍施加的力 F，球拍和球接触的时间为 t。
接触之前的动量 mv
球拍施加的力 F
接触的时间 t
接触之后的动量 mv'
质量：m
速度：v，v'
好机会!!
接触之前
接触的瞬间
接触之后
来看一下球接触球拍前后的动量吧。
算出来了!
喂……
二宫同学……
啊，啊
呃，啊，嗯，我在听，球的动量，嗯……


由于动量是
质量 × 速度
所以接触球拍之前，
球的动量为 mv……
接触之后球的动量为
mv′，那么动量的变化
为 mv′－mv。
正确！
另一方面冲量为 Ft
mv'-mv=Ft
……是这样的。
动量的变化＝冲量
其实这个公式可以说是
运动方程式 ma=F 的另
一种变化形式。
ma=F
mv'-mv=Ft
是这样吗？
只不过有时知道力的时
候求动量的变化，反过
来从动量的变化求力的
时候用到。



例如，如果知道了接触球拍之前与之后的球的速度分别为 v，v'，和球与球拍的接触时间 t，
v
就能知道球拍对球施加的力了。
F
哦——
t
v'
那么，也能知道击球的力了吧？
速度等具体的值知道了的话就能求出来了！
具有 性作用的击球
这个很有用呢！

实验室

计算击球的动量



让我们实际分析二宫的击球动作，计算击球时球的受力大小。将刚才二宫在练习时，击回对手扣杀时的动作用高速摄像机拍下来。





知道，知道，不就是这样设定吗？



这次可一定要拍下来呀。



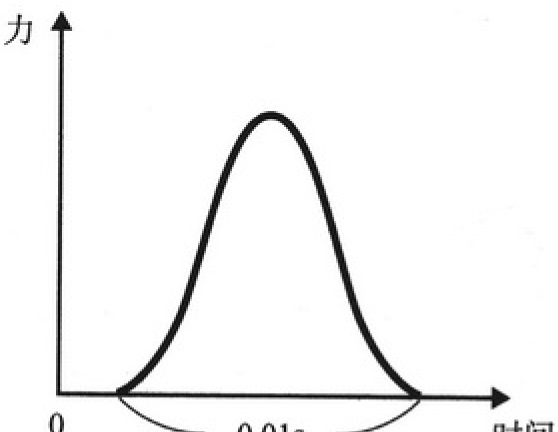
你再说我就……



总之，将这段录像分解后可以看出，球飞过来时的速度大约是 100km/h，击回时的速度为80km/h。而从球落到拍子上到飞出去的时间大约是0.01秒。



这样，计算所需要的各项数值就凑齐了吧？

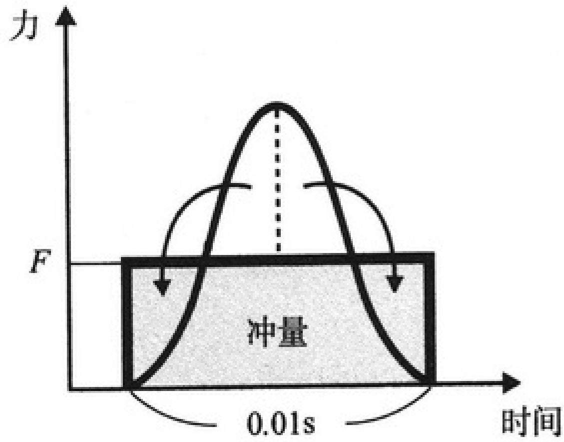




是的，用这些数值就可以求出二宫的球拍加在球上的力有多大了。实际产生的力的大小如图所示的那样，并不是一定的。



但是，在此从平均的角度出发，我们将这种力视为一定的，并将它设为 F。





这样看起来就很容易计算了。



首先计算出网球被击回之前的动量。网球的质量为 0.06kg，速度从被击回的方向来看是 –100km/h，由于 1km 等于 1000m，1h 等于 3600s，将速度的单位换算成米 / 秒后，100（km/h）=100×1000/3600（m/s），由此可知，

网球被击回之前的动量 = 质量 × 速度

=0.06×（–100×1000/3600）≈ –1.7（kg · m/s）



那网球被击回之前的动量就是 –1.7kg · m/s 了。出现负值总是觉得怪怪的，至少我是这种感觉。



用同样方法就可以计算出网球被击回之后的动量。网球被击回之后的速度是 80km/h，方向为正，因此，

网球被击回之后的动量 =0.06×（80×1000/3600）≈ 1.3（kg·m/s）

知道了网球被击回前后的动量，就应该能求出网球的动量的变化了吧？

网球的动量的变化是：

网球的动量的变化 = 网球被击回之后的动量 −
被击回之前的动量
= 1.3−（−1.7）=3.0（kg · m/s）

这样就可以得知动量的变化是 3.0kg · m/s。因为受力时间为 0.01 秒，所以将其代入下面的关系式，

网球的动量的变化 = 网球所受的力 × 网球的受力时间

就变成了

$$3.0=F\times 0.01$$

那只要用 3.0 除以 0.01 就可以得出 F 值了……是 300 吧！

是的！再加上力的计量单位 N（牛顿），就得出

$$F\approx 300\ (\mathrm{N})$$

为便于理解，将力的单位换算成 kg 表示。因为 1kg 约等于 10N，所以，二宫击回对手扣杀时使出的力量约为 30kg。

真的吗？要举起 30kg 的东西可不是闹着玩的。

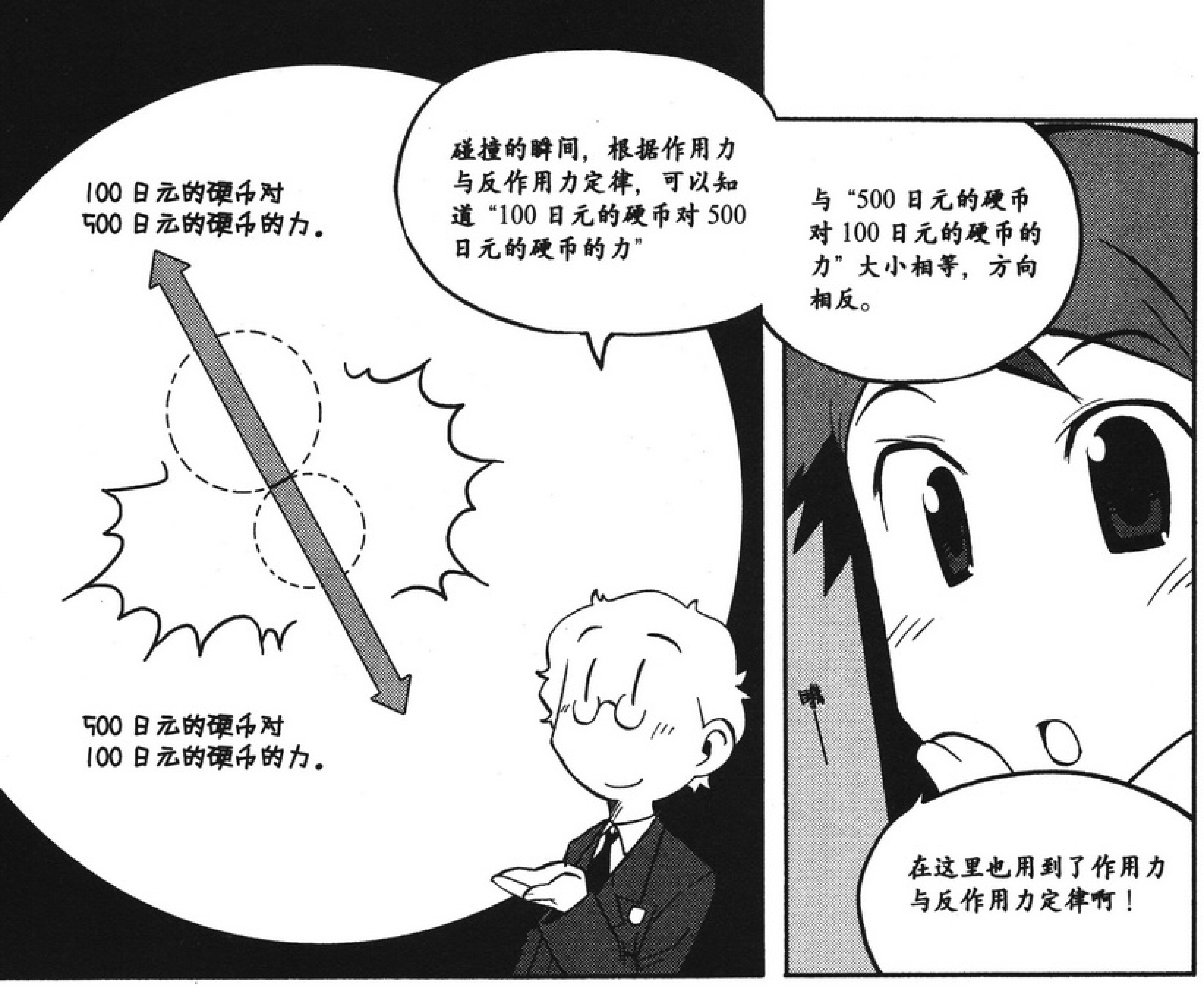
这是瞬间爆发力。和举起 30kg 重的东西时肌肉的作用方式是完全不同的。

2. 动量守恒

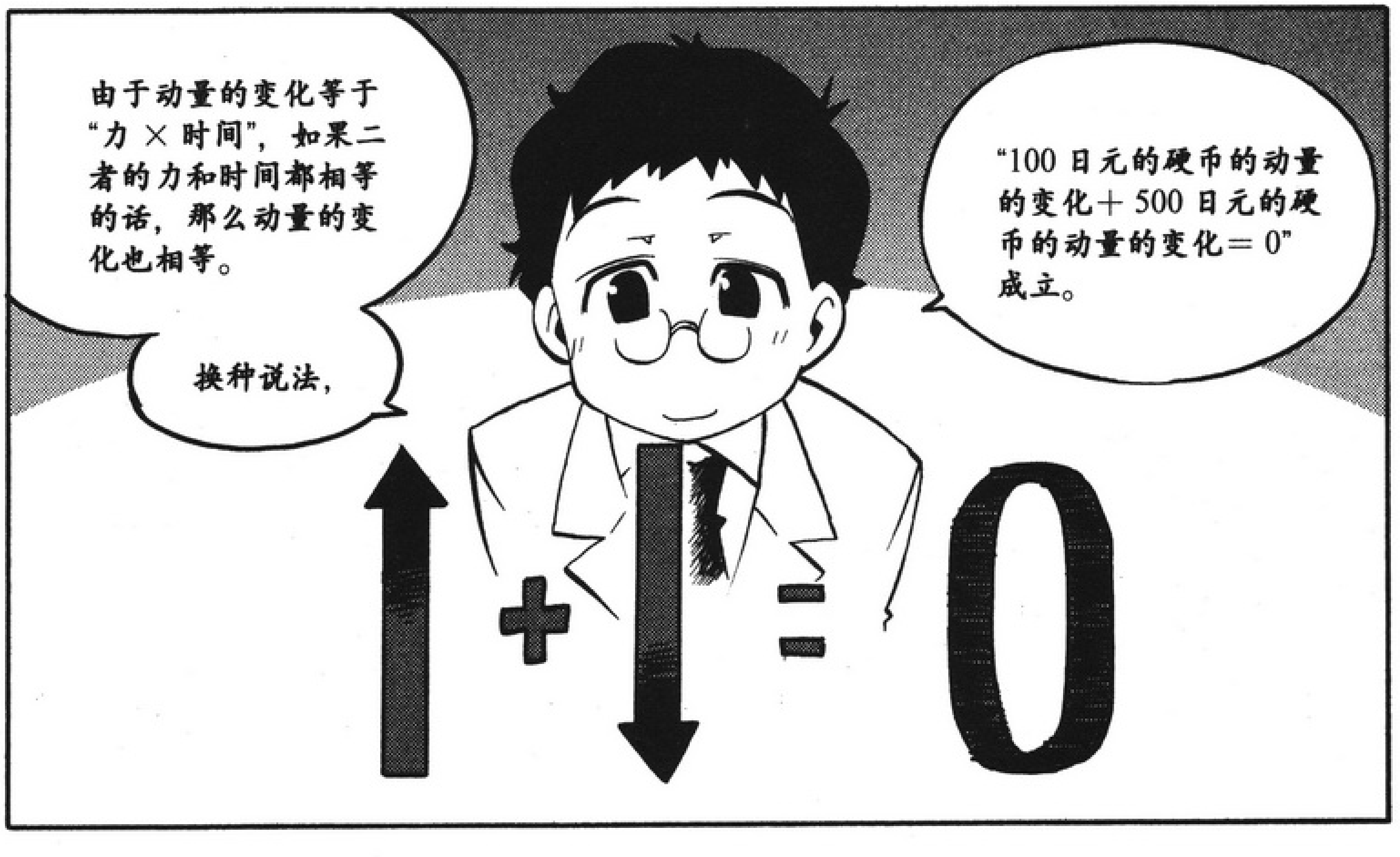
作用与反作用和动量守恒




用简单的例子来说明一下吧！
这里放着100日元和500日元的硬币。
请弹100日元的硬币去碰撞500日元的硬币。
嗯……明白。
呃！……
500日元的硬币被弹到远处，而100日元的硬币又弹回来了。
100日元的硬币去碰撞500日元的硬币。

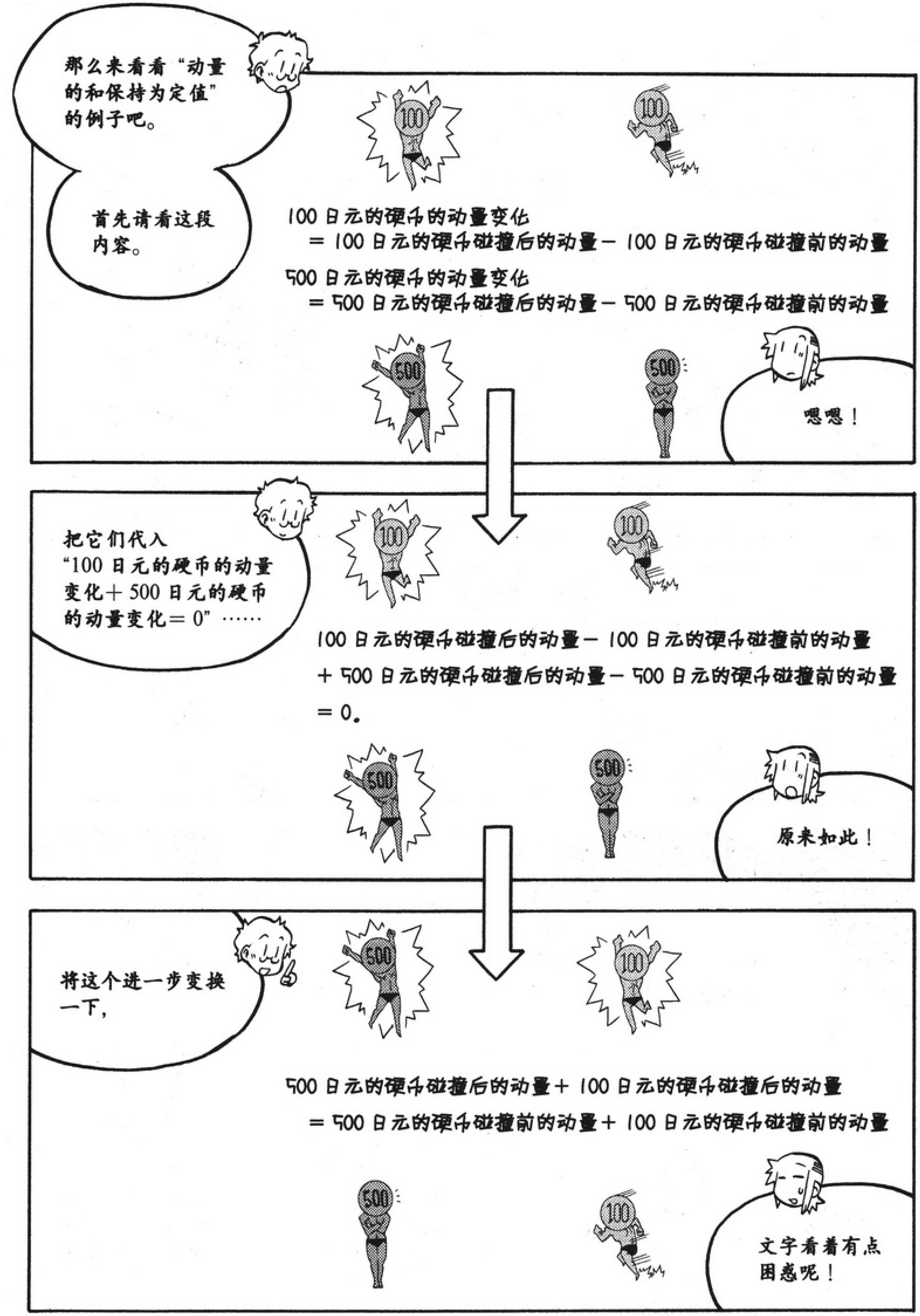


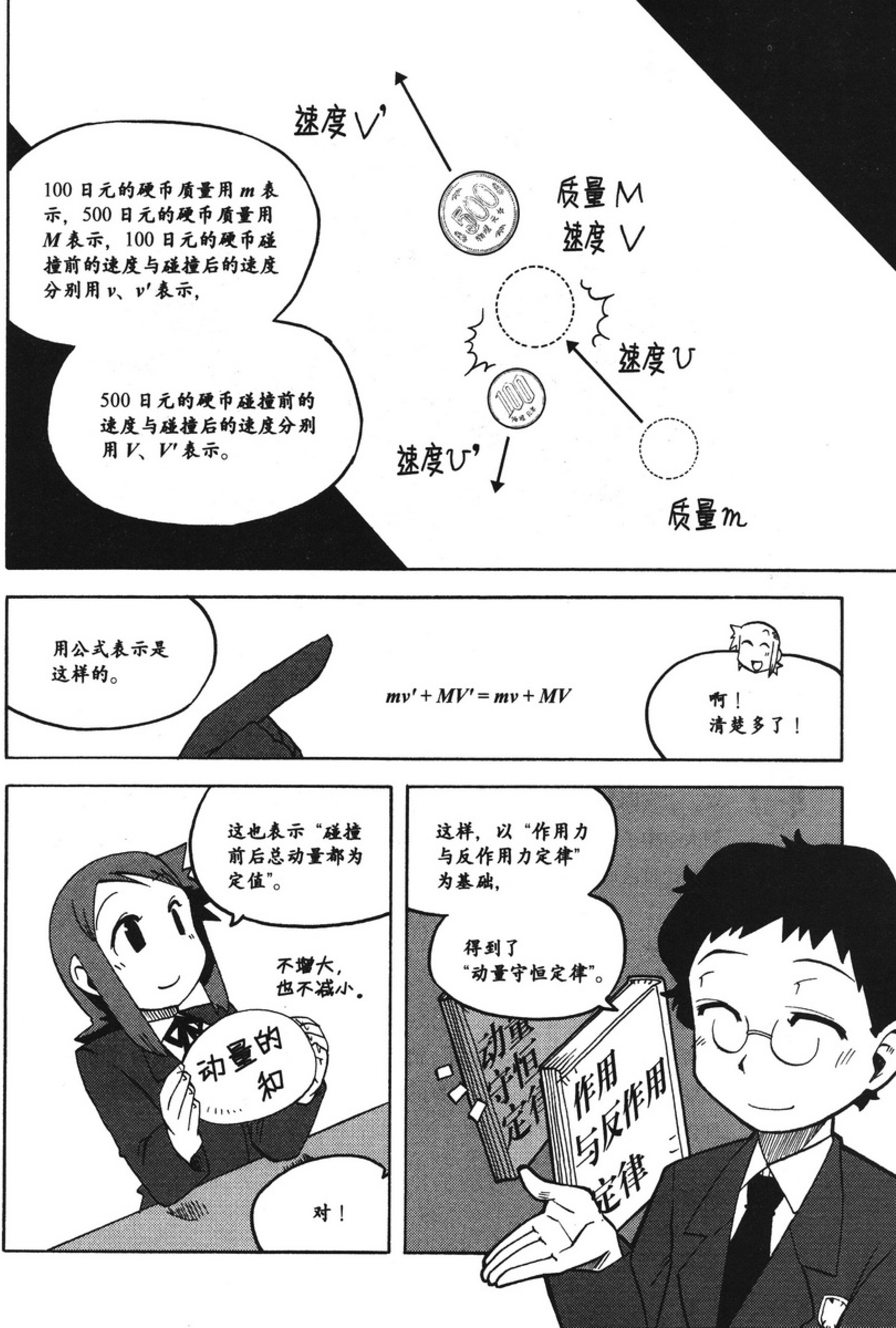
100日元的硬币对
500日元的硬币的力。
碰撞的瞬间，根据作用力与反作用力定律，可以知道“100日元的硬币对500日元的硬币的力”
与“500日元的硬币对100日元的硬币的力”大小相等，方向相反。
500日元的硬币对
100日元的硬币的力。
在这里也用到了作用力与反作用力定律啊！



由于动量的变化等于“力×时间”，如果二者的力和时间都相等的话，那么动量的变化也相等。
换种说法，
“100日元的硬币的动量的变化＋500日元的硬币的动量的变化＝0”成立。
+
=
0


500日元的硬币由于静止不动因而动量为0。而100日元的硬币有动量而发生碰撞……
由于都受到力的作用，100日元的硬币和500日元的硬币的动量都发生了变化。
ドーン
……虽然是感觉不爽的图，但是还是很容易理解的！
那个动量的和与刚开始100日元的硬币的动量相比，没有变化！
对！
这个叫做“动量守恒定律”。
哈哈哈哈
动量守恒……怎么回事？
在物理中，随着时间的变化，总量不发生变化就叫做守恒。

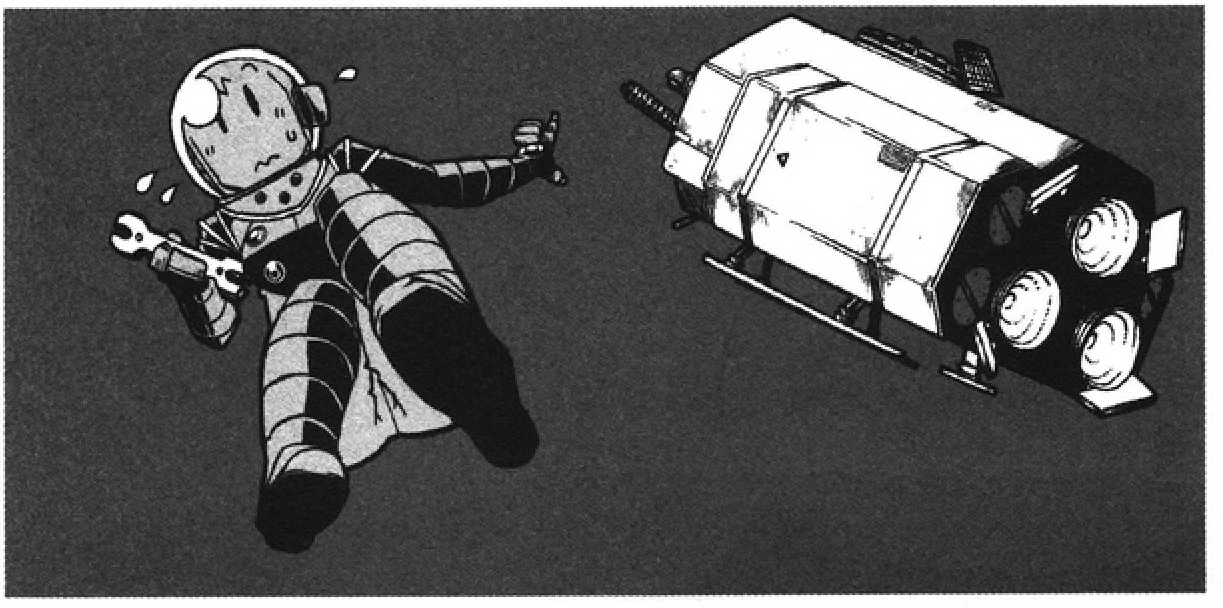

那么来看看“动量的和保持为定值”的例子吧。
首先请看这段内容。
100日元的硬币的动量变化
= 100日元的硬币碰撞后的动量－100日元的硬币碰撞前的动量
500日元的硬币的动量变化
= 500日元的硬币碰撞后的动量－500日元的硬币碰撞前的动量
100
500
嗯嗯！
把它们代入“100日元的硬币的动量变化＋500日元的硬币的动量变化＝0”……
100日元的硬币碰撞后的动量－100日元的硬币碰撞前的动量
＋500日元的硬币碰撞后的动量－500日元的硬币碰撞前的动量
＝0。
原来如此！
将这个进一步变换一下，
500日元的硬币碰撞后的动量＋100日元的硬币碰撞后的动量
＝500日元的硬币碰撞前的动量＋100日元的硬币碰撞前的动量
文字看着有点困惑呢！



速度V'
100日元的硬币质量用m表示，500日元的硬币质量用M表示，100日元的硬币碰撞前的速度与碰撞后的速度分别用v、v'表示，
质量M
速度V
速度v
500日元的硬币碰撞前的速度与碰撞后的速度分别用V、V'表示。
速度v'
质量m
用公式表示是这样的。
$mv' + MV' = mv + MV$
啊！清楚多了！
这也表示“碰撞前后总动量都为定值”。
不增大，也不减小。
动量的和
对！
这样，以“作用力与反作用力定律”为基础，
得到了“动量守恒定律”。
动量守恒定律
作用与反作用定律

实验室

宇宙和动量守恒定律



现在来研究一下宇宙中的动量守恒定律的例子吧。

哦，宇宙！?

对。二宫同学现在是宇航员。在太空船的舱外活动，不幸绳子脱落而漂浮到太空中了。现在你只有在舱外活动时使用的工具而已。那么，要怎么做才能让自己返回到太空船中呢？

呃！游泳？

呵呵，在真空中是游不了泳的。请想一想第一运动定律。不受力的物体，如果处于静止状态就一直保持静止状态。不管手脚怎么动，在真空中身体只会以重心为中心旋转。

绝望了！



请不要放弃！说不定可以利用物理知识哦！二宫同学拿着工具吧，将工具朝与太空船相反的方向投出去，而且要用力投。那么，根据动量守恒定律，二宫同学会沿着投出去物体的反方向，也就是太空船的方向运动。



真的！？我得救了！



二宫同学的运动速度为 V，来确认一下它的值吧！投出去的工具的质量为 m，它的速度为 v，还有，二宫同学的质量为 M，在将工具投出去之前，都在宇宙中处于静止状态，那么速度都为 0，二宫同学与工具的动量和为 0。



如果都没有动的话，动量就为 0 ！



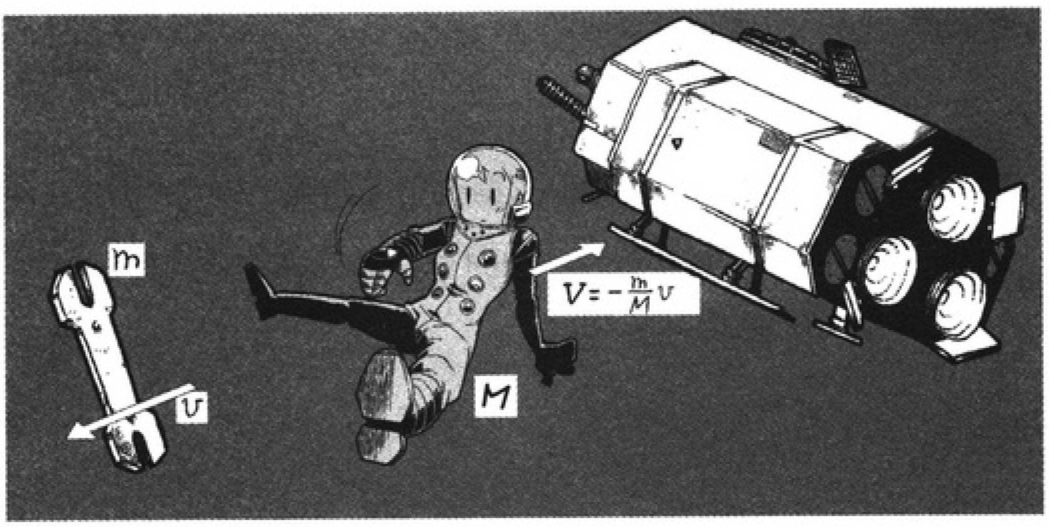
根据动量守恒定律，将工具投出去后，动量的和也还是为 0。

$$mv+MV=0$$

成立。根据这个公式，二宫同学的速度为 ：

$$V=-\frac{m}{M}v$$

这里的负号表示，二宫同学的速度方向与投出去的工具的方向相反。





那么，如果工具的质量越大，投出去的速度越快的话，我运动的速度就越快？



对。来代入实际的数值看一下吧。工具的质量为 1kg，二宫同学的体重加上太空服的重量，质量一共为 60kg，投出去的工具的速度设为时速 30km，那么：

$$V=-\frac{1}{60}\times 30=-0.5$$

你将会以时速为 0.5km 的速度沿着与工具相反的方向运动。



那么，如果我拿着很多工具，不断的一个一个的投出去的话，我的速度是不是会越来越快？



问得好！从结论上来说，是会越来越快。其实这是火箭的推进机制。后方喷出的燃料相当于“投出去的物体”。



呃，这样的啊！



由于不断喷出燃料，火箭会朝着与喷出方向相反的方向运动。只要喷射持续不断，动量就会不断增加，而持续加速运动。当停止喷出燃料的时候，将做匀速直线运动。

3. 使用“动量的变化=冲量”


为了减小冲击
不过——与“动量守恒定律”相比，“动量的变化=冲量”
怎么说呢……
在实际生活中没有什么实际感受呢！
不是这样的！
为了减小冲击的时候就用到它！
冲击？
例如，从很高的地方落下来的时候，着地前的动量由落下来的高度和落下来的物体的质量决定。
落地后速度为0，因此动量也变为0了。
嗯嗯。



那个动量的变化值虽然不能改变，但有办法可以减小对身体的冲击。
延长与跳床的力作用的时间就可以了。
TIME
这样听着是很简单的呢！
呃，要怎么做呢？
运用“动量变化＝冲量”，
有着地时发生的动量的变化 mv ＝跳床对身体的作用力 F × 力作用的时间 t。
可以变换出这个公式：$F = \frac{mv}{t}$。
如果延长力作用的时间的话，跳床对身体的作用力，也就是冲击就能变小了。
原来如此啊！



在体育课上……
跳高的时候，
一定要垫垫子。
这样才安全！
平时，没有注意到“垫子
由于其比较柔软而吸收了
冲击”……
从力学的角度来看，
确实是“延长了力作用
的时间”呢！
ぼすっ
这样来思考觉得
好新鲜啊！



用了垫子，力作用的时间从0.1秒变成1秒，
新记录呢！
这样，冲击力就减小到了原来的十分之一了。
猫能从很高的地方安全的跳下来也正是因为其身体的柔软性呢！
是啊，手脚和身体都弯曲的话，稍微延长一下受到力作用的时间，就能减小冲击。
这样一想，
力学与日常生活的很多地方都有关系呢！

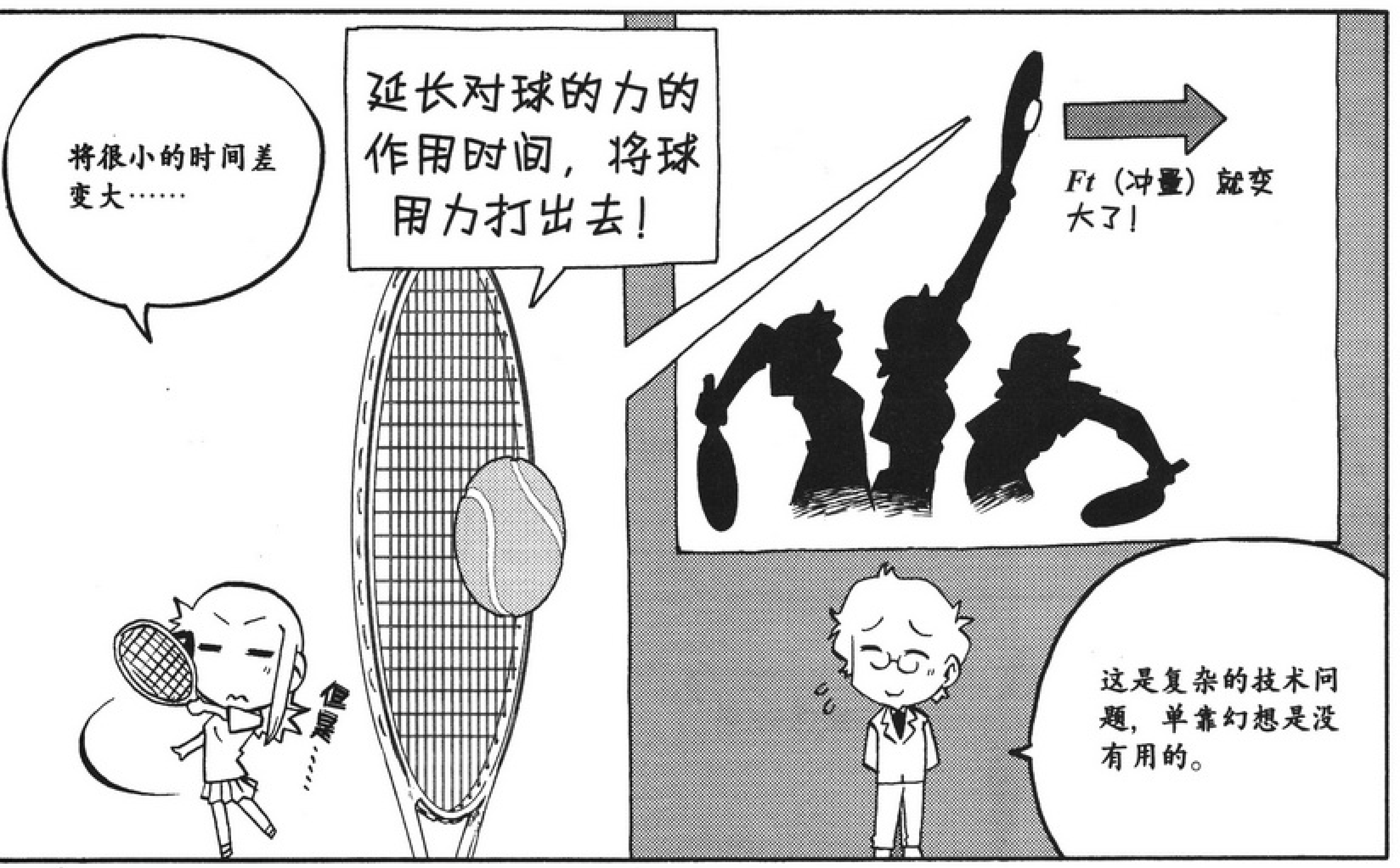

啊
为了发出速度更快的球
动量的变化与冲量的关系……难道说它也可以用于使力增强？
呃，也可以。
这样不是也能用到网球中了吗！
没错……
请回忆一下研究敲击时的动量的知识。
对了！
嗯……发球啦!!
二宫同学的必杀发球的目标是将大家打倒!!
理解了动量的话……也就能找到使其变大的方法了！
……想打出这种发球吗？
うおりゃあ
ゴオオ
ぱあああ



看了最近的比赛，发现你们两个人的体力差不多。
不过觉得早矢香同学采用身体的弹跳，能发出速度更快的球。
那就是说我比不上早矢香了……
そわっ
きゃあっ
反，反过来说，二宫同学有很大的提升空间啊！
好！那么就用力学来研究一下发球吧！
好！
啊
啊
呃，根据“动量变化＝力×时间”，为了发出更快的球，
可以尽量延长力的作用时间是一种方法。
真是的
当球过来的时候，用要将球打烂的气势去打球！说得好！


原来如此啊……，
还有其他方法吗？
二宫同学的发球一
般都浪费了呢！
这样的话，球拍与
球碰撞的时间就延
长了，
即使是相同的力，
由于力作用的时间长，
冲量就能变大了。
还有一个方法就是使用
更大的力……
啊！？
球与拍接触的时候
有点时差
力的最大值
MAX
迟于接触
的时刻
看着觉得比球与球拍接
触的时候略晚了一点才
使出最大力气。
是……
是这样。


所以说，
调整身体姿势，在球与球拍接触的瞬间使出最大的力气就可以了。
调整啊……


将很小的时间差变大……
延长对球的力的作用时间，将球用力打出去！
Ft（冲量）就变大了！
这是复杂的技术问题，单靠幻想是没有用的。


不过，
利用“动量变化＝冲量”的原理将球打飞可是事实啊！
嗯。


以后在比赛中要集中注意球呢！



我虽然知道原理，但是实际去打就不行了……换了二宫同学肯定可以做到！
你这么说，我很高兴呢……
谢谢！良田！♥
良……呃！为什么!?为什么突然！
啊！接下来你又有什么企图了？
ずざざざっ
没有没有，不是那么回事了。
总是称呼姓氏，不觉的很客气吗？
你也叫我“田惠”就好了。
这……即使这么说也……
什么嘛！拿出点男子气概！


就叫“田惠”！
这样的话，
就当是昵称吧？
啊，良田？
好，就这么决定了。
呜呜呜……
总而言之！
咳，咳
力学的基础知识
讲完了，
请努力学习吧！
啊，嗯！
对了，
良田的讲义也讲完了呢
……
对……对啊！

后续

动量与冲量

动量，表示物体运动的大小和方向的物理量。质量为 m、速度为 $\vec{v}$ 的物体的动量用 $\vec{p}$ 表示为：

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

由于速度是矢量，因此动量也是矢量。动量的方向与速度的方向相同。

第 2 章强调过，运动的物体自己不能保持力的作用。与此对应，它持有动量。物体的动量，随着力作用而变化。具体表示动量随力作用的变化情况的是动量与冲量的关系。在此根据运动方程式来推导动量与冲量的关系吧。

来研究质量为 m 的球碰到球拍的情况吧。球与球拍碰撞之前的速度为 $\vec{v}$，碰撞之后的速度为 $\vec{v}'$，还有，球拍对球的作用力为 $\vec{F}$。这时，运动方程式为：

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

因此球的加速度为 $\vec{a}$。一般，$\vec{F}$ 不是一个定值，在这里将它作为平均值看作定值（参照第 118 页）。那么，$\vec{a}$ 也为定值。这时加速度 $\vec{a}$，用球受球拍施加的力的时间 t 来表示是这样的：

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t}$$

将这个公式代入运动方程式：

$$m\left(\frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t}\right) = \vec{F}$$

公式两边同时乘以 t 得到：

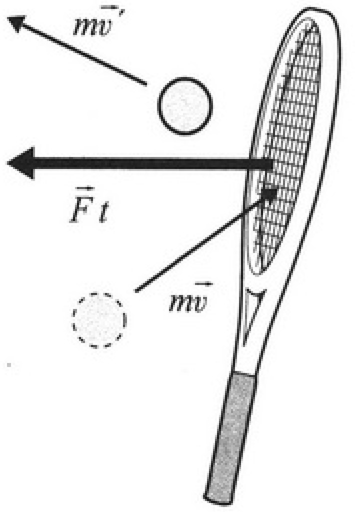
$$m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{F}t$$

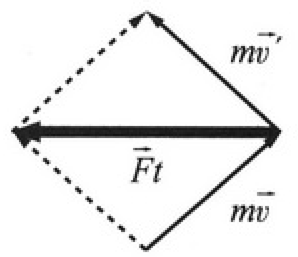
$m\vec{v}' - m\vec{v}$ 表示的是球的动量的变化，$\vec{F}t$ 叫做冲量。

那么，有

动量变化＝冲量

这样的关系成立。而且，动量$m\vec{v}$、$m\vec{v}'$与冲量$\vec{F}t$，遵循下图所示的矢量合成定律。





$m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{F}t$

由上面的推导方法可以知道，动量变化与冲量的关系，是在力假定为定值的基础上，根据运动方程式变换过来的。在第 115 页中，良田说“动量变化与冲量的关系是运动方程式变换过来的，这么说一点也不为过”，就是这个意思。

日常生活中的“动量与冲量”

在 p129 页学过，根据“动量的变化＝冲量”的关系，可以减小冲击。物体从运动状态变为静止状态时，为了减小所受的冲击力的作用，可以延长冲击时间。之所以这么说，是因为：

物体的动量的变化 = 受的力 × 受力时间

从很高的地方跳下来的时候，到达地面前的瞬间的动量为 mv，到达地面静止后动量为 0，因此动量的变化的大小为 mv。这个动量的变化，是因为受到地面施加的力的作用。身体不得不受到这个力的作用，这就是身体受到的“冲击力”。冲击力用 F 表示，受力时间用 t 表示，那么有：

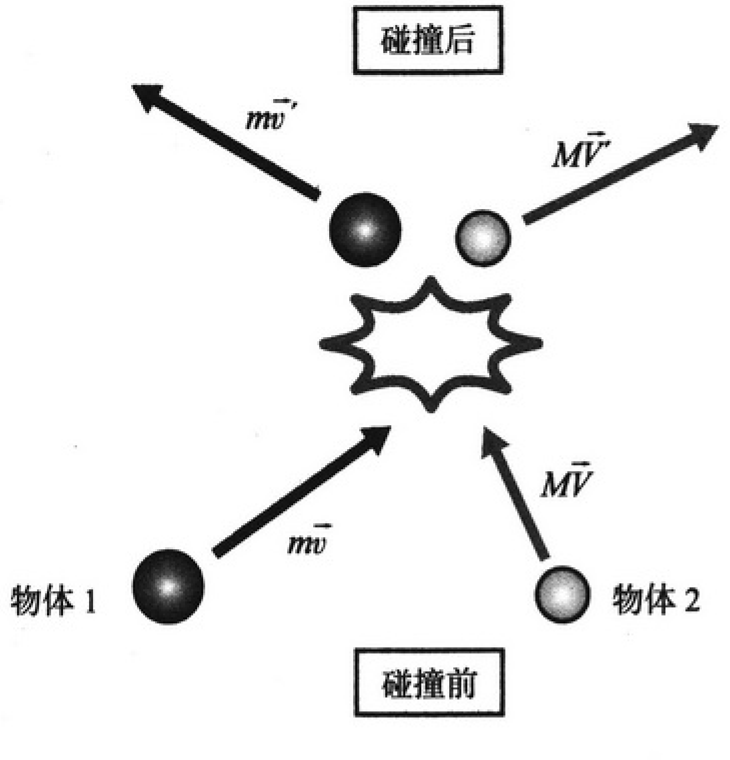
$mv=Ft$

即使 mv 相同，但是如果 t 大的话，F 就小。跳高时用的垫子（参见第 131 页），就是人落下来的时候延长动量从 mv 变为 0 的时间的工具。人落到垫子上，与垫子接触的时间里，人受到力 F 的作用，而 Ft 为一定值，因此时间 t 越长力，F 就越小。

"动量变化＝冲量" 的应用例子，在日常生活中的许多地方都可以看到。在接球的时候，手会无意识的往后退一下，这也是，延长球碰到手直到静止下来的时间，从而减小冲击力。还有，棒球手套、拳击手套也是，利用手套延长冲击力的作用时间，从而达到减小冲击力的目的。柔道的护身、汽车上的安全带和安全气囊，都是为了延长冲击时间从而减小动量变化时的冲击力的方法。橡筋绳也是，登山的人掉下来的时候，由于它会伸长而延长冲击时间，避免腰部突然受到力的作用。如果不用专用的绳子，用没有弹性的绳子会很危险。

动量守恒定律的推导方法

两个相互碰撞的物体，根据 "动量的变化＝冲量" 的关系，可以推导出动量守恒定律。



如图所示，物体 1 和物体 2，在没有受到外部其他力作用的情况下碰撞。首先，来研究物体 1（下图的左图）。物体 1 的质量用 m 表示，碰撞前与碰撞后的速度分别用 $\vec{v}$ 和 $\vec{v}'$ 表示。而且物体 1 受到物体 2 施加的力用 $\vec{F}$ 表示。

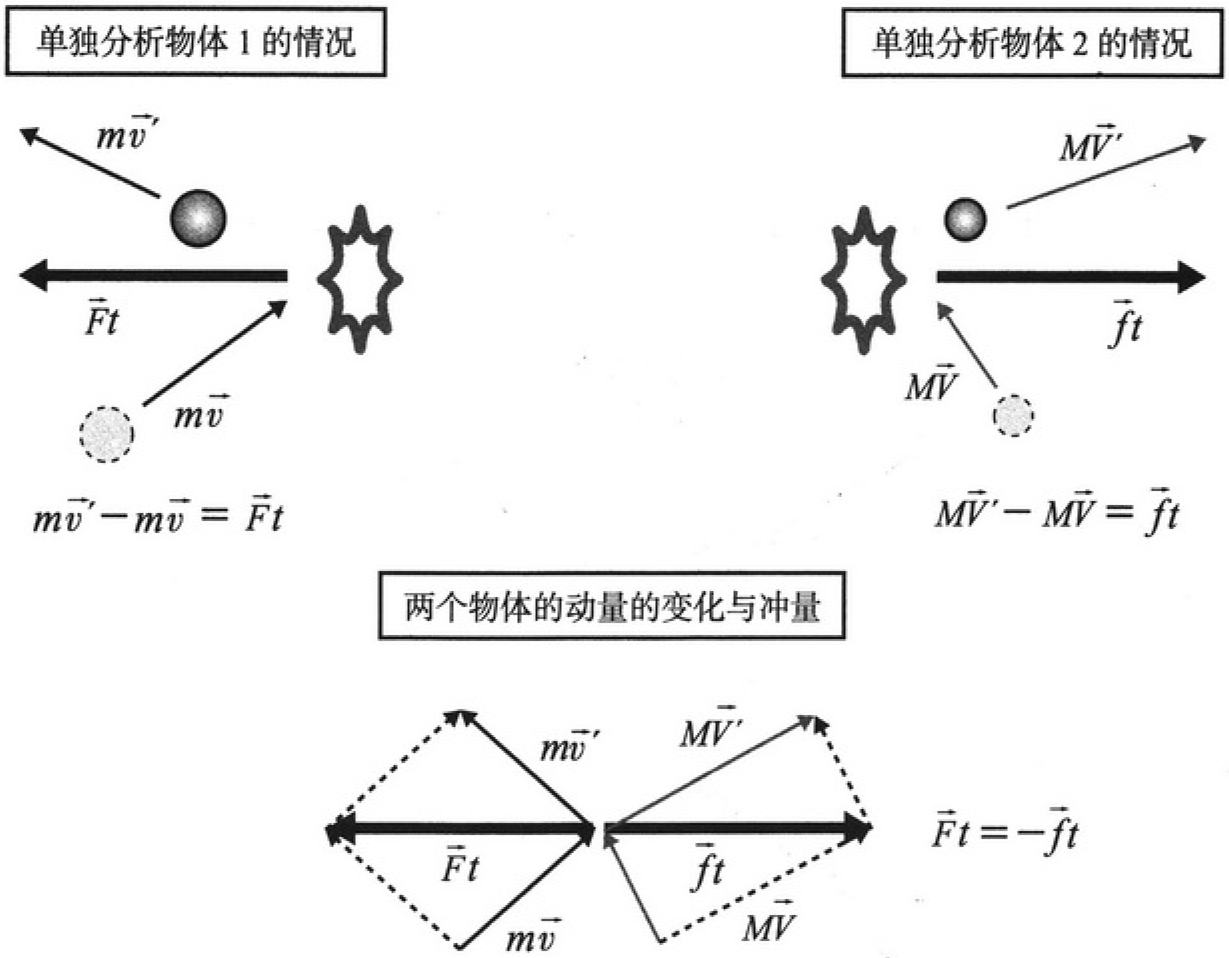
根据“动量变化＝冲量”的关系得到：

$$m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{F}t$$

在这里，t 表示物体 1 与物体 2 碰撞的时间。力近似为定值。现在对物体 2 写出“动量的变化＝冲量”的表达式（下图的右图）。物体 2 的质量用 M 表示，碰撞前与碰撞后的速度分别用 $\vec{V}$ 和 $\vec{V}'$ 表示，物体 2 受到物体 1 施加的力用 $\vec{f}$ 表示，有：

$$M\vec{V}' - M\vec{V} = \vec{f}t$$

成立。注意，单独分析物体 1 和物体 2 时，碰撞的时间是相等的。



在这里用到作用力与反作用力定律，物体 2 受到物体 1 施加的力 $\vec{f}$，与物体 1 受到物体 2 施加的力 $\vec{F}$ 大小相等，方向相反。

$$\vec{f} = -\vec{F}$$

对这个作用力与反作用力定律的公式两边乘以 t：

$$\vec{f}t = -\vec{F}t$$

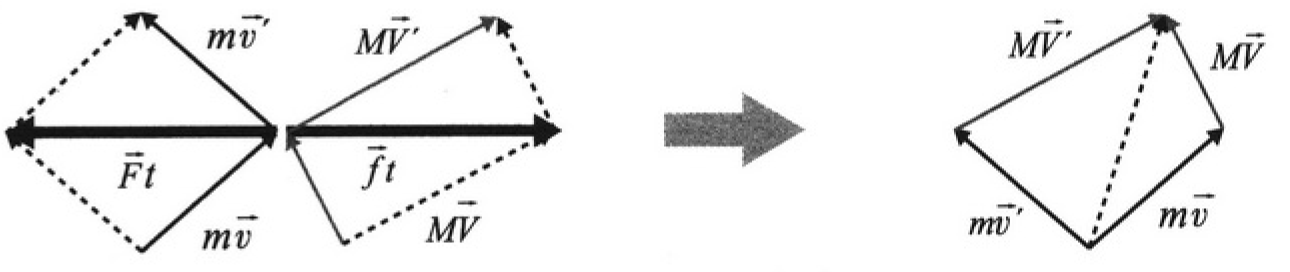
将上面的两个“动量的变化＝冲量”的公式代入得到：

$$M\vec{V}'-M\vec{V}=-(m\vec{v}'-m\vec{v})$$

整理一下这个公式，得到：

$$m\vec{v}'+M\vec{V}'=m\vec{v}+M\vec{V}$$

这个就是第 125 页中出现的动量守恒定律※。

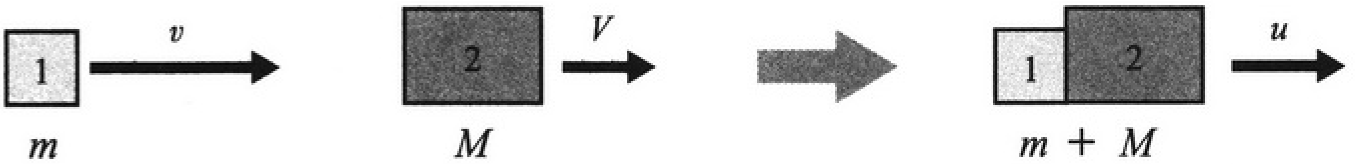


$$m\vec{v}'+M\vec{V}'=m\vec{v}+M\vec{V}$$

以上都是用矢量图表示的，如上图的左侧，将物体 1 与物体 2 各自的“动量的变化＝冲量”的公式用作用力与反作用力定律联系起来，对应于上图右侧的矢量的组合。

只采用动量守恒定律进行分析的问题：分裂和合体

一般来说，碰撞问题只用动量守恒定律是解决不了的，不过一个物体分裂为两个物体的情况和两个物体合体为一个物体的情况例外，可以只用动量守恒定律来解决。p126 中的将工具投出去的情况，如果将田惠和工具看成质量为 $m+M$ 的一个物体，那么这种情况就是一种分裂问题。在这里，来研究一下合体情况吧。



质量为 m 的物体 1 的速度为 v，与质量为 M、速度为 V 的物体 2 碰撞，然后合二为一了。

※ 第 125 页中，为了简便，公式中没有用矢量表示，不过应该用正确的符号表示以表明动量是矢量。不过，在同一条直线上运动的物体的碰撞问题，可以不用矢量符号表示。

这时，合体后的速度为 u，合体后的质量为 $m+M$，根据动量守恒定律：

$$mv+MV=(m+M)u$$

成立。因此，合体后的速度为：

$$u=\frac{mv+MV}{m+M}$$

还有，如果物体 2 从右向左运动，那么 $V<0$，上面的公式也是成立的。

动量的单位

来研究一下动量的单位吧。力的单位为 N（牛顿），而动量没有为其定义的单位。动量的单位，根据定义公式“动量 = 质量 × 速度”：

动量的单位 = 质量的单位 × 速度的单位 =(kg)·(m/s)=(kg·m/s)

就这样，根据公式确定了动量的单位。用“动量的变化＝冲量”公式也能确定动量的单位。动量变化的单位就是动量的单位。因此动量的单位与冲量的单位相同，有：

动量的单位 = 冲量的单位 = 力的单位 × 时间的单位 =(N)·(s)=(N·s)

这个与上面的 (kg · m/s) 看着不同，但是 N 可以用 (kg · m/s^2) 表示，因此：

(N·s) = (kg·m/s^2)　(S) = (kg·m/s)

二者是相等的。根据以上分析，可以知道：

动量的单位是 (kg·m/s)，也可以是 (N·s)

提 高

作用力与反作用力定律和动量守恒定律

采用微积分，可以如下所示简单的推导出动量守恒定律。物体 1 的速度和质量分别为$\vec{v_1}$、m_1，物体 2 的速度和质量分别为$\vec{v_2}$、m_2。二者不受外力作用。物体 1 对物体 2 施加的力为$\vec{F}_{1\to2}$，物体 2 为物体 1 施加的力为$\vec{F}_{2\to1}$，它们的运动方程式分别为：

$$m_1\frac{d\vec{v_1}}{dt}=\vec{F}_{2\to1}\ \text{和}\ m_2\frac{d\vec{v_2}}{dt}=\vec{F}_{1\to2}$$

将这两个式子代入作用力与反作用力定律中：

$$\vec{F}_{1\to2}=-\vec{F}_{2\to1}$$

得到：

$$m_2\frac{d\vec{v_2}}{dt}=-m_1\frac{d\vec{v_1}}{dt}$$

由于质量是定值，因此方程式可以变换为：

$$\frac{d(m_2\vec{v_2})}{dt}=-\frac{d(m_1\vec{v_1})}{dt}$$

整理一下可以得到：

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2})=0$$

这个方程式表示，物体 1 和物体 2 的动量的和$m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}$，不随时间变化而变化。因此表示动量守恒定律：

$$m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}=\text{定值}$$

根据以上的推导可以知道，动量守恒定律是根据作用力与反作用力定律推导出来的。反过来说，动量守恒定律是建立在作用力与反作用力定律的基础上的。

而且，对于三个或三个以上的物体，同样也可以推导出动量守恒定律。

矢量表示的动量守恒定律

由于动量是矢量，所以动量守恒定律用矢量表示也是成立的。也就是说，不止是大小，还包括方向也是守恒的。为此，第 121 页中的硬币的碰撞中动量的方向发生变化的情况，需要分不同方向进行分析计算。

来研究一下如下图所示的物体 1（对应于 100 日元的硬币）、与静止的物体 2（对应于 500 日元的硬币）碰撞的情况吧。物体 1 的质量为 m，碰撞前和碰撞后的速度分别为 $\vec{v}$、$\vec{v}'$，物体 2 的质量为 M，碰撞后的速度用 $\vec{V}'$ 表示。物体 1 碰撞前的速度的方向是沿 x 轴的方向，碰撞后物体 1 和物体 2 的运动方向与 x 轴的夹角分别为 θ、ϕ，$v=|\vec{v}|$，$v'=|\vec{v}'|$，$V'=|\vec{V}'|$，那么：

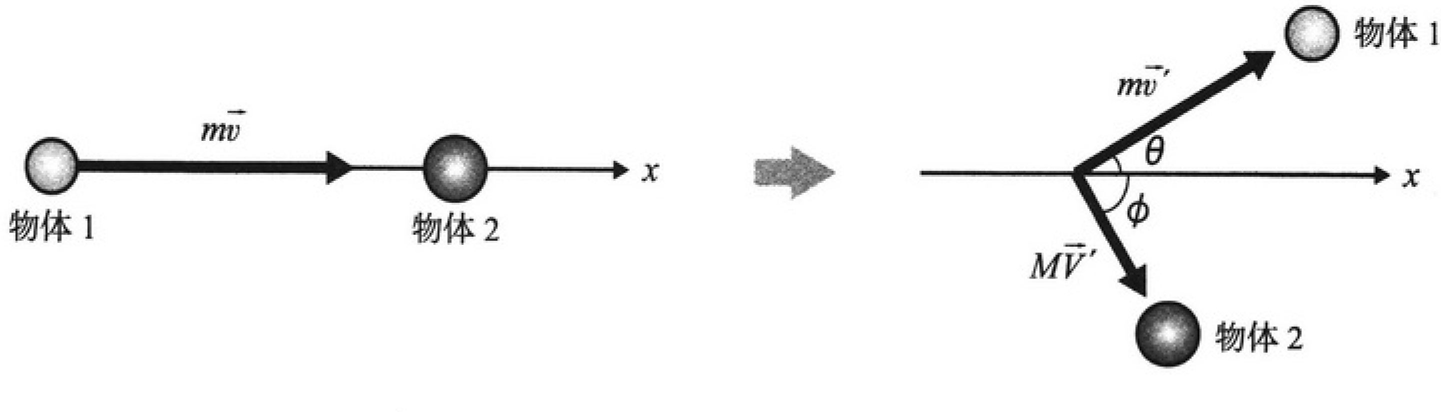
$$\vec{v}=(v,0),\ \vec{v}'=(v'\cos\theta, v'\sin\theta),\ \vec{V}'=(V'\cos\phi, -V'\sin\phi)$$

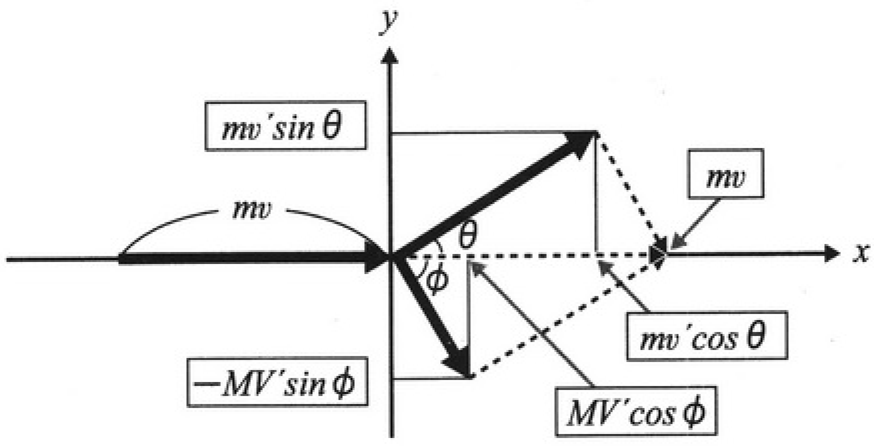
这些速度用矢量表示，将动量守恒定律在不同的方向上表示出来：

x 方向　$mv=mv'\cos\theta+MV'\cos\phi$

y 方向　$0=mv'\sin\theta-MV'\sin\phi$

500 日元的硬币与 100 日元的硬币碰撞的时候，经常 100 日元的硬币被弹回来，这时 $\theta>90$，因此 $\cos\theta<0$。图中表示的是 $\theta<90$ 的情况。

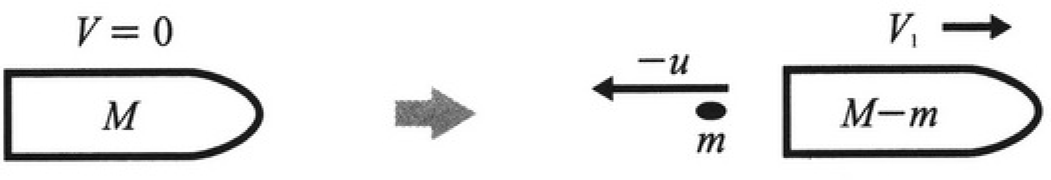




动量守恒定律，无法决定碰撞后的物体以什么角度、以多大的速率运动。这个问题在以后的章节再讨论。

火箭的推进

第 126 页的实验室，我们学习了在宇宙中静止的宇航员，将物体扔出去，宇航员沿着与扔出去方向相反的方向运动。这个现象与火箭的推进原理是相同的。火箭将燃料高速从后面喷射出来，从而增加与喷射方向相反的方向上的速度。来详细看一下这个情况吧。



首先，在宇宙中静止的火箭，以速度 $-u(u>0)$ 放出质量为 m 的小物体。小物体与火箭的质量和为 M，放出后火箭的速度以 V_1 表示，根据动量守恒定律有：

$$0=(M-m)V_1+m(-u)$$

所以

$$V_1=\frac{m}{M-m}u \tag{1}$$

火箭再次放出质量为 m 的物体，方向与之前的方向相同，相对速度（以火箭为参照物的速度）为 $-u$。这时火箭的速度为 V_2，放出第 2 个小物体前后的火箭的质量分别为 $M-m$、$M-2m$，这时的动量守恒定律的式子为：

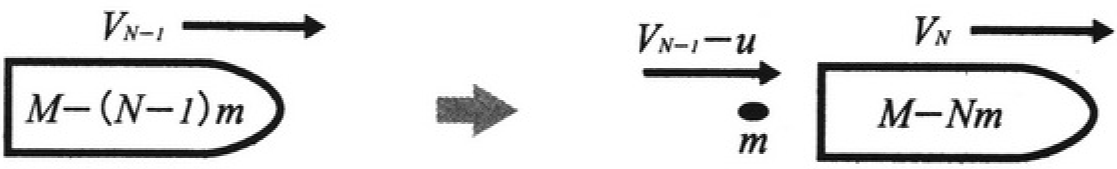
$$(M-m)V_1=(M-2m)V_2+m(V_1-u)$$

请注意，火箭以速度 V_1 行进，小物体的绝对速度应该是 V_1-u。根据上面的公式求 V_2，得到：

$$V_2 = V_1 + \frac{m}{M-2m}u \tag{2}$$

将式（1）代入式（2）消去 V_1 得到：

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{m}{M-m}u + \frac{m}{M-2m}u \\ &= \left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m}\right)mu \end{aligned} \tag{3}$$



（以速度 V_{N-1} 为的火箭为参照物，小物体以速度 $-u$ 从后面被放出去）

火箭不断的以相对速度 $-u$ 释放出质量为 m 的小物体。释放出 N 个小物体后的火箭的速度用 V_N 表示，根据动量守恒定律：

$$[M-(N-1)m]V_{N-1}=(M-Nm)V_N+m(V_{N-1}-u)$$

因此 V_N 为：

$$V_N = V_{N-1} + \frac{m}{M-Nm}u$$

将这个式子不断重复使用可以得到：

$$V_N = \left(\frac{1}{M-m} + \cdots + \frac{1}{M-Nm}\right)mu = \sum_{k=1}^{N}\frac{m}{M-km}u \tag{4}$$

实际上火箭是连续不断的从后面喷射出燃料。在这里，将式（4）改成表示连续的状态。火箭在微小时间 Δt 里以速度 $-u$ 喷射出质量为 Δm 的燃料。从静止状态到喷射 N 次后的时间为 t，那么 $t = N\Delta t$。这时火箭的速度用 $V(t)$ 表示，式（4）改变一下：$m \to \Delta m$、$V_N \to V(t)$，

得到：

$$V(t)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\Delta m}{M-(\Delta m/\Delta t)(k\Delta t)}u \tag{5}$$

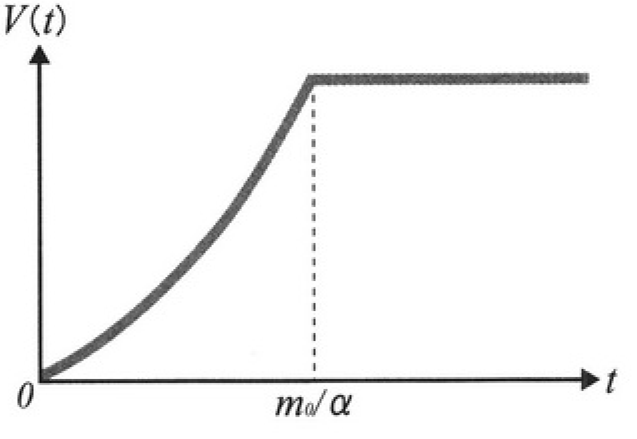
当喷射间隔 Δt 趋近于无穷小 $\Delta t\to 0$ 时，和就变成积分的形式了。采用积分的形式的时候，应注意将它们改成：$N\to\infty$、$\Delta m/\Delta t\to \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$（单位时间里减少的质量也就是喷射的燃料的质量），$\Delta m\to(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)\mathrm{d}t$，那么：

$$\begin{aligned}V(t)&=u\int_0^t\frac{1}{M-(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)t}u(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t\\&=u\int_0^t\frac{1}{M(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)^{-1}-t}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6}$$

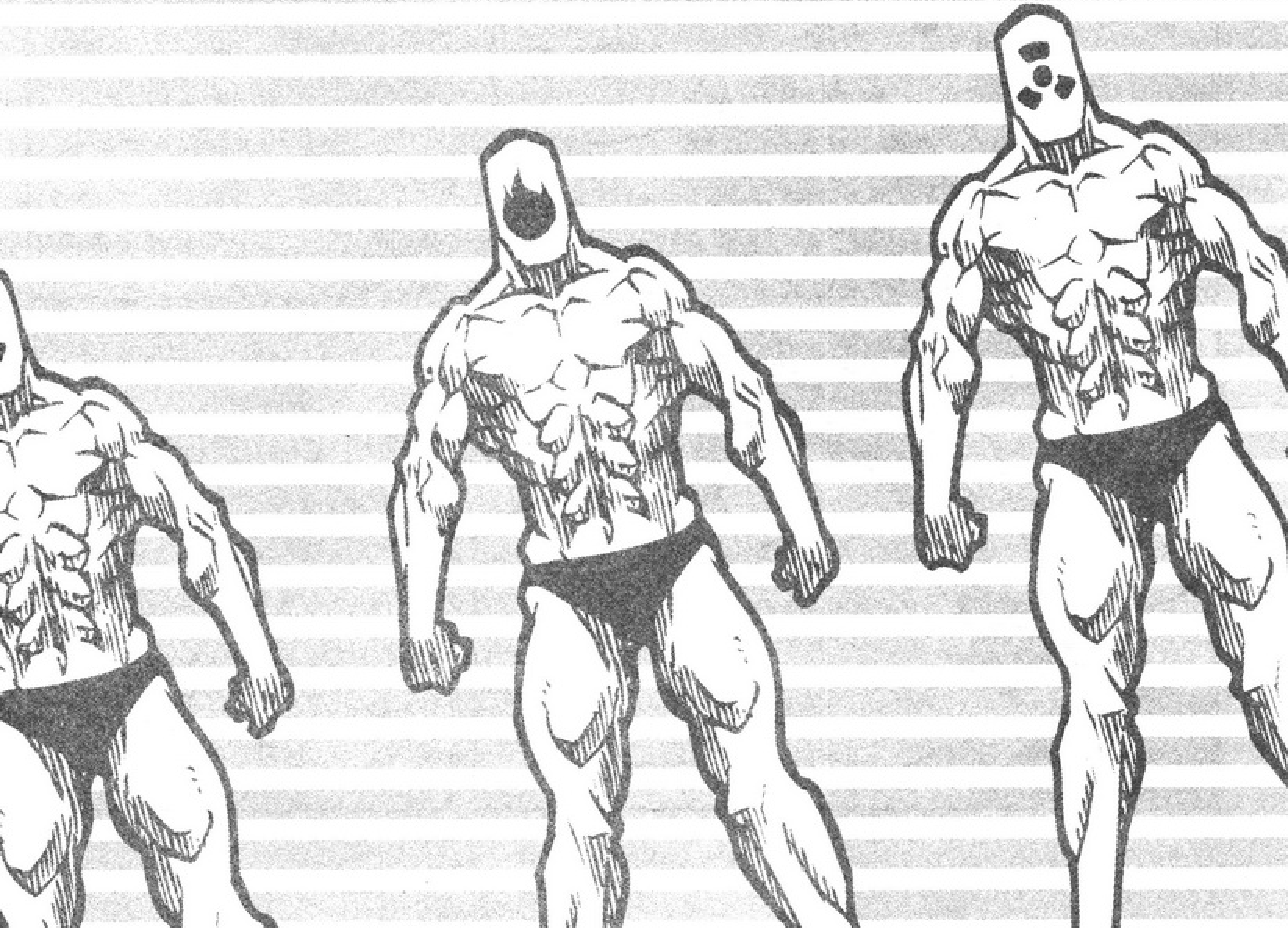
当单位时间里喷射的燃料为一定值时，$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=\alpha$（定值）那么式（6）为：

$$\begin{aligned}V(t)&=u\int_0^t\frac{1}{M/\alpha-t}\mathrm{d}t=u[-\log_e(M/\alpha-t)]_0^t\\&=a\log_e(\frac{M}{M-\alpha t})\end{aligned} \tag{7}$$

得到上面的积分表达式。根据式（7），可以表示出初速度 $V(0)=0$ 的速度。αt 表示在时间 t 里火箭喷射出的燃料的总质量。那么，如果火箭最初储存的燃料的总质量为 m_0，火箭经过时间 $t=\frac{m_0}{\alpha}$ 后燃料用完，火箭从加速运动变成匀速直线运动（如下图所示）。



第4章 能量



1. 做功与能量


哇！
好风景呢！
以前不知道学校附近还有这样的地方呢！
是好地方哦！
呃，
那你经常来吗？
嗯！
研究不顺的时候，我就一个人到这里来换一换心情。
这样啊……
谢谢你带我来。
不……
不用谢，
没什么……


这里比较安静……
那么在这里讲完最后的一点内容吧。
嗯！
能量的概念
嗯，在上斜坡或楼梯的时候……
比在平地上走路要累呢！
实际上，在上斜坡或楼梯的时候，体内的消耗的能量是在平地上走路的时候3倍左右。
呃！这样啊！
下降得这么快啊!!


能量的概念并不局限于这个时候，它在日常生活中可以经常见到。
能量利用率高的好车啊，能量饮料啊，都涉及能量。
它与力的概念一样，日常生活中使用的意义与物理学中的不一样。
呃？那么……
能量也是在物理学中定义的词？
对，
就像力是根据运动定律来定义的一样，
能量也有其正确的定义。


咕嘟咕嘟
啪
这么一说，我记得有动能和势能。
运动的物体有表示运动大小的“动能”。
动能，与动量不一样吗？
对，动量有动量守恒定律，能量也有“能量守恒定律”。
能量也守恒？
除了动能，还有势能、电能、
化学能、热能。
原子能等等各种各样的形式的能量存在。
不喝吗？
……


这些以多种形态
存在的能量之间
可以相互转换。
能量能变换成很多
不同的形式。
总量一定
不管能量转变成多少种类，
它的总量是一定的，这就
是“能量守恒定律”。
来研究一下具体的
例子吧，
例如自行车的
充电灯。
它是自行车的一部分动
能转换成电能，然后将
电能转换成光能的装置。
哦，
原来是这样
啊！


反过来，
电动车是将电能转换成动能。
电能
动能
普通车呢？
普通汽车的引擎有一种热传动机构，
能将热能转换为动能，从而使汽车运动。
热能
动能
那个热能是从由于汽油与空气反应生成的化学能中来的。
即使如此，
能量的总量总是守恒的。
人也是，以吃的食物和饮料的能量为来源，
转换为运动需要的动能和保持体温需要的热能等。

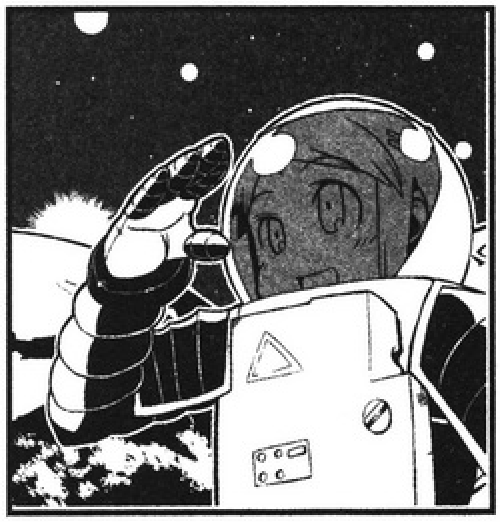

在我们体内也有能量的变化啊！
我们会觉得能量总是在消耗。
其实只是转换成别的形式了，能量的总量没有变化。
总量保持一定。
那些多种形式的能量的基础是动能和势能……
机械能。
势能？
……
这个概念稍后再讲。
首先讲动能。
好！


某个物体的动能用下面的公式表示：
啊？
动能＝$\frac{1}{2}$×质量×速率×速率
不是“速度”而是“速率”，为什么？
发现值得注意的地方了！
速率是只表示大小的量，因此动量也是标量，
绝对没有负数。
……
这是怎么回事？
与动量比较一下吧！
还记得这个公式吗？
动量＝质量×速度
嗯嗯！


动量是有大小和方向的矢量。
动能则没有方向。
还有，一般来说，两个物体的动量相等，
但是动能不同。
这样啊？
例如，质量为 1kg、速率为 1m/s 的物体的动量的大小
与质量为 0.5kg、速率为 2m/s 的物体的动量的大小相等，都是 1kg m/s。
1 [m/s]
1 [kg]
动量的大小 = 1 kg·m/s
动能 = 0.5J
2 [m/s]
0.5 [kg]
动量的大小 = 1 kg·m/s
动能 = 1J
来计算动能，前者的动能是
$\frac{1}{2}\times 1\text{kg}\times 1\text{m/s}\times 1\text{m/s} = 0.5\text{J}$，
后者的动能是
$\frac{1}{2}\times 0.5\text{kg}\times 2\text{m/s}\times 2\text{m/s} = 1\text{J}$。


等下……
J是？
'J'……
J（焦耳）
是能量的单位。
定义 1J=1kg m²/s²。
嗯？
将约为 102g 的物体往上提 1m 所需的能量相当于 1J。
102g
如电能的千瓦单位，
食品中使用的卡路里单位。
※50g 的蛋糕大概有 170 千卡路里能量＝710000 焦耳。
1[J]
大约 0.2389 卡路里
大约 2.78×10⁻⁷kW·h
焦耳能转换成其他能量的单位，
啊!!!
蛋糕……
用焦耳来衡量总觉得好恐怖啊！
？
好像是呢！
？
……

动量与动能的区别



动量与动能的区别，如果用多个物体来研究的话，会更加容易理解一些。

是吗？

回忆一下二宫同学在宇宙中遇到困难时讲的知识（参照第 126 页）。二宫同学为了回到太空船中而利用了动量守恒定律，将质量为 m 的工具以速度 v 投出去而获得动量 $-MV$。

是这样的。

由于投之前都处于静止状态，因此二者的动量都为 0。投出去之后，根据动量守恒定律，

$$\text{工具与宇航员的动量的和} = mv + MV = 0$$

也就是说有 $mv = -MV$ 成立。也就是，工具的动量与二宫宇航员的动量 MV 大小相等，方向相反，和为 0。

动量由于是矢量，所以有方向，大小相等的动量，方向相反，它们相会抵消。

现在，来研究一下工具的动能与二宫宇航员的动能吧。由于投之前都处于静止状态，所以二者的动能都为 0。

不过，投出去之后，产生了动能，它们的和不再为 0。

$$\text{工具与宇航员的动能的和} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 > 0$$

由于产生了动能，所以我就运动了。

这个动能是二宫同学投工具而产生的。根据能量守恒定律，产生的动能消耗了二宫同学体内的能量。

嗯嗯。

测量体内的能量是很困难的，不过反过来，求身体产生和吸收的能量，从而能得到身体能量的增减。

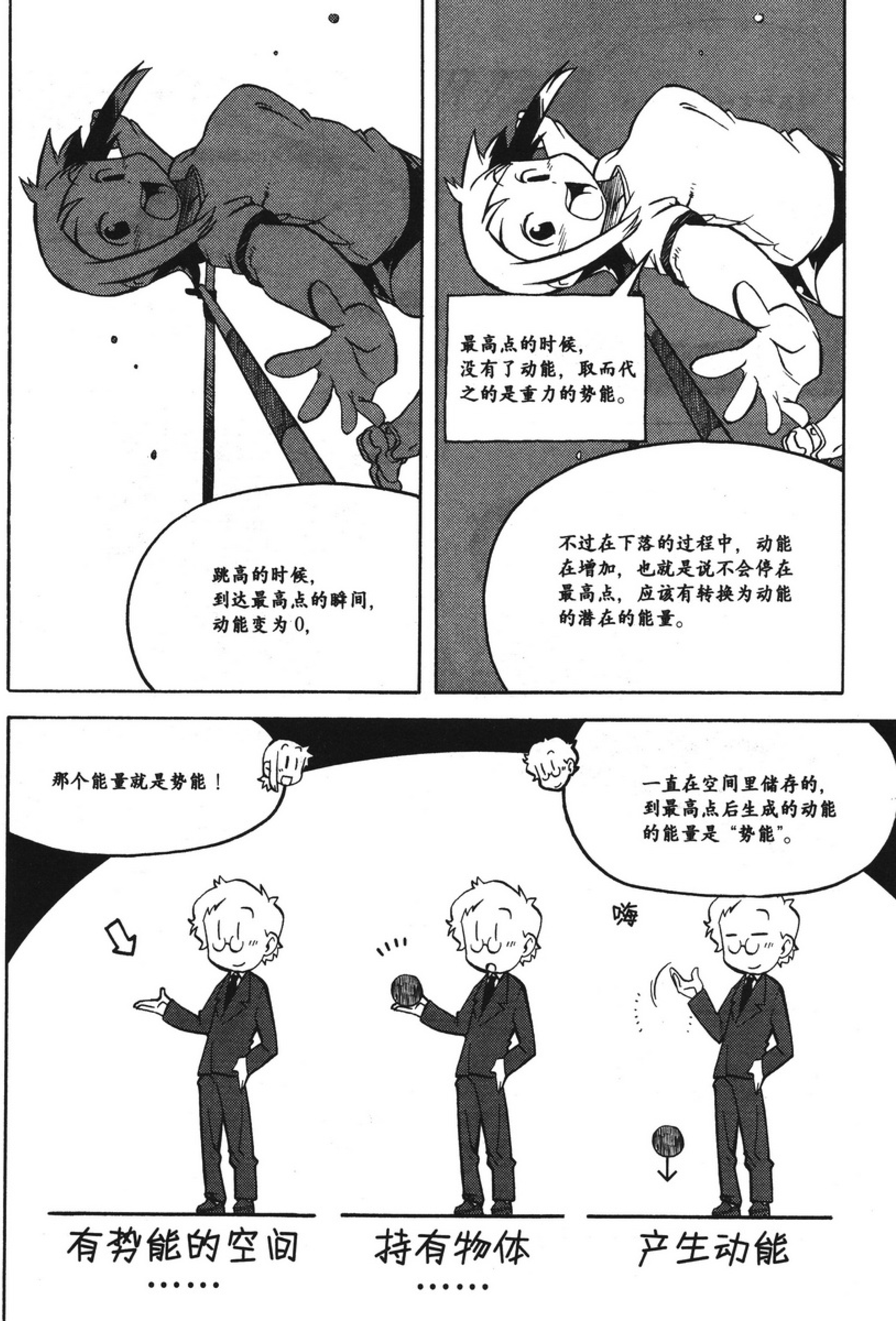
也就是说，我使物体运动而产生的能量，就是我体内消耗的能量呢！

这也属于能量守恒定律的范畴。由以上的例子，也可以知道，能量与动量两个物理量，需要从不同的角度来考虑。

势能



之前说过，
力学的能量有动能和势能……
势能。
是什么？
嗯，
势能表示“潜在的能量”的意思。
Potential
啊，
势能是潜在的能量……？
这个用跳高的例子来解释吧。


跳高的时候，
到达最高点的瞬间，
动能变为0，
最高点的时候，
没有了动能，取而代之的是重力的势能。
不过在下落的过程中，动能在增加，也就是说不会停在最高点，应该有转换为动能的潜在的能量。
那个能量就是势能！
一直在空间里储存的，
到最高点后生成的动能的能量是“势能”。
嗨
有势能的空间……
持有物体……
产生动能


现在研究的势能与地球的重力有关，
可以叫做重力势能。
那么，
除了物体下落的情况，
在其他情况也有势能存在吗？
例如，
伸长缩短的橡皮筋或弹簧。
嗨
还真的有很多物体都有呢……
拉橡皮筋的时候，
橡皮筋存储了势能。
手松开，
势能就会转变为物体的动能。
橡皮筋或弹簧，相对于其本来的长度，储存了能量，这也是势能的一种，叫做弹性势能。



为了产生势能，需要将物体提升，或者拉橡皮筋对物体有力的作用。
产生动能也是需要对物体有力的作用。
像这样，为了使能量发生变化，需要对物体施加力的作用使其运动。
这叫做“做功”。
与平时使用的概念不大一样呢！
对，从力学上来讲，
功＝物体移动的距离 × 力在移动方向上的分力
这就是它的定义。
力在移动方向上的分力
力
物体
物体的移动距离
简单来说，是距离 × 力……
嗯，不过必须考虑方向……


将物体沿竖直方向往上提的时候，有做功，等于“施加的力 × 往上提的距离”，
而只提着物体却没有动，不管有多累，在物理上来说，是没有做功的。
力
将包往上提的情况做功。
移动
力
静止
只是拿着包而没有动的情况做功为零。
只是拿着物体，也会消耗体力，而这不叫做做功……
做功是使能量增减变化的方法。因此，可以说“物体拥有动能”，
好重啊……
而不能说“物体持有功”，要么是做功，要么是被做功。
原来如此啊！



做功与势能
这样，
做功能够使势能增加或减少。
将物体往上提的时候，
如果做功，势能也增加。
例如，往上提的包，
手施加的与重力相抵消的力
× 往上提的高度
做这样的功。
这时，力的方向与包的移动方向一致，因此做功的符号为正。
因此，
势能增加。

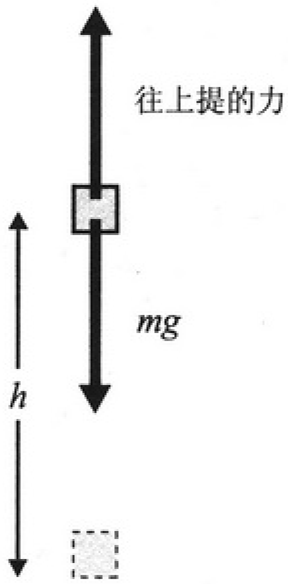

包往下运动的时候，
势能减小？
就是这样的。
势能增加
力
移动
往上移动，做功为正
势能减少
力
移动
往下移动，做功为负
把往上提的包往下移动，
由于移动的方向与力的
方向相反，包做功为负，
所以势能减少。
橡皮筋的情况也
是如此，将橡皮
筋拉开做功为正。
移动
力
应该说是储存了
势能。


还有，将物体往上提而做功，并不局限于一定要竖直往上提。
呃，还有可以使用斜坡，或者使用滑轮的方法！
采用这些方法，就能减小往上提所需要的力。
不过，与竖直往上提的情况相比，力的距离增加了，
提升的高度相同的话，结果做的功都是相同的。
哎呀呀！
这个叫做做功的原理。
原来如此！

实验室

证明做功的原理

来研究一下将重物搬到某个高度的情况吧。最简单的方法是直接竖直的搬上来。将这个情况简单化的表示出来是这样的。





将质量为 m 的物体搬到高度为 h 的地方了呢！

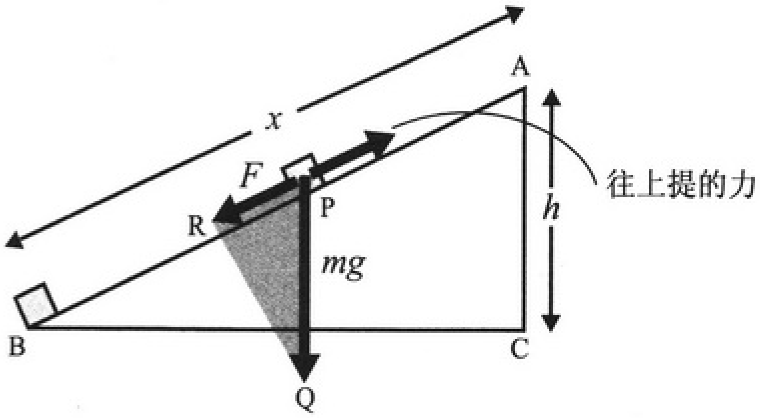
对重物施加的力与重力相抵消，也就是说施加与重力大小相等的力，将作物搬到高为 h 的地方，来看一下这个做功情况。重力加速度为 g，重物受的重力为 mg，那么往上提的力也为 mg、因此有：

竖直往上提做的功 = 往上提的力 × 往上提的高度 $=mgh$

此时，不考虑空气阻力和摩擦力的情况。不过，竖直往上提是最简单的，但是很累。

对啊。用车子来运，利用斜坡运上去会轻松得多。

那么，来研究一下利用斜坡将重物运到高为 h 的地方的情况吧。





这时，使物体往上运动所需要的力的大小，需要抵消重力沿斜坡方向的分力，因此大小与图中的 F 的大小相等。因此，物体从 B 点上升到 A 点做的功是，（斜坡的长度用 x 表示）

利用斜坡往上提做的功 $=Fx$

那么，可以知道沿斜坡方向的力 F 比重力 mg 小，不过，这个分力的作用距离变长了。



所以，结果做功的量与竖直往上提是一样的呢！



来证明一下吧。图中的斜面用△ ABC 表示，力的分解用△ PQR 表示，由于是直角三角形，有∠ CAB= ∠ RPQ，二者相似，也就是说△ ABC 与△ PQR 是大小不同而形状相同的三角形。因此有对应边等比例的关系。也就是：

$$\frac{AB}{AC}=\frac{PQ}{PR}$$

此处有 AB=x、AC=h、PQ=mg、PR=F，那么：

$$\frac{x}{h}=\frac{mg}{F}$$

也就是：

$$Fx=mgh$$

所以有：

利用斜面往上提做的功＝竖直往上提做的功

成立。



很好的用公式证明了做功的原理呢！



请注意，这个计算结果不管斜面的倾斜角度是多少都是相同的。
像这样，根据做功的原理，将质量为 m 的物体提升高度 h，不考虑往上提的阻力情况，那么做的功为：

$$\text{抵消重力的力} \times \text{提升的高度} = mgh$$



不管采用什么方法，这个做功的量是不变的呢！



反过来说，根据这个功，势能增加了 mgh。也就是说，某个质量为 m 的物体上升 h，它的势能增加了 mgh。



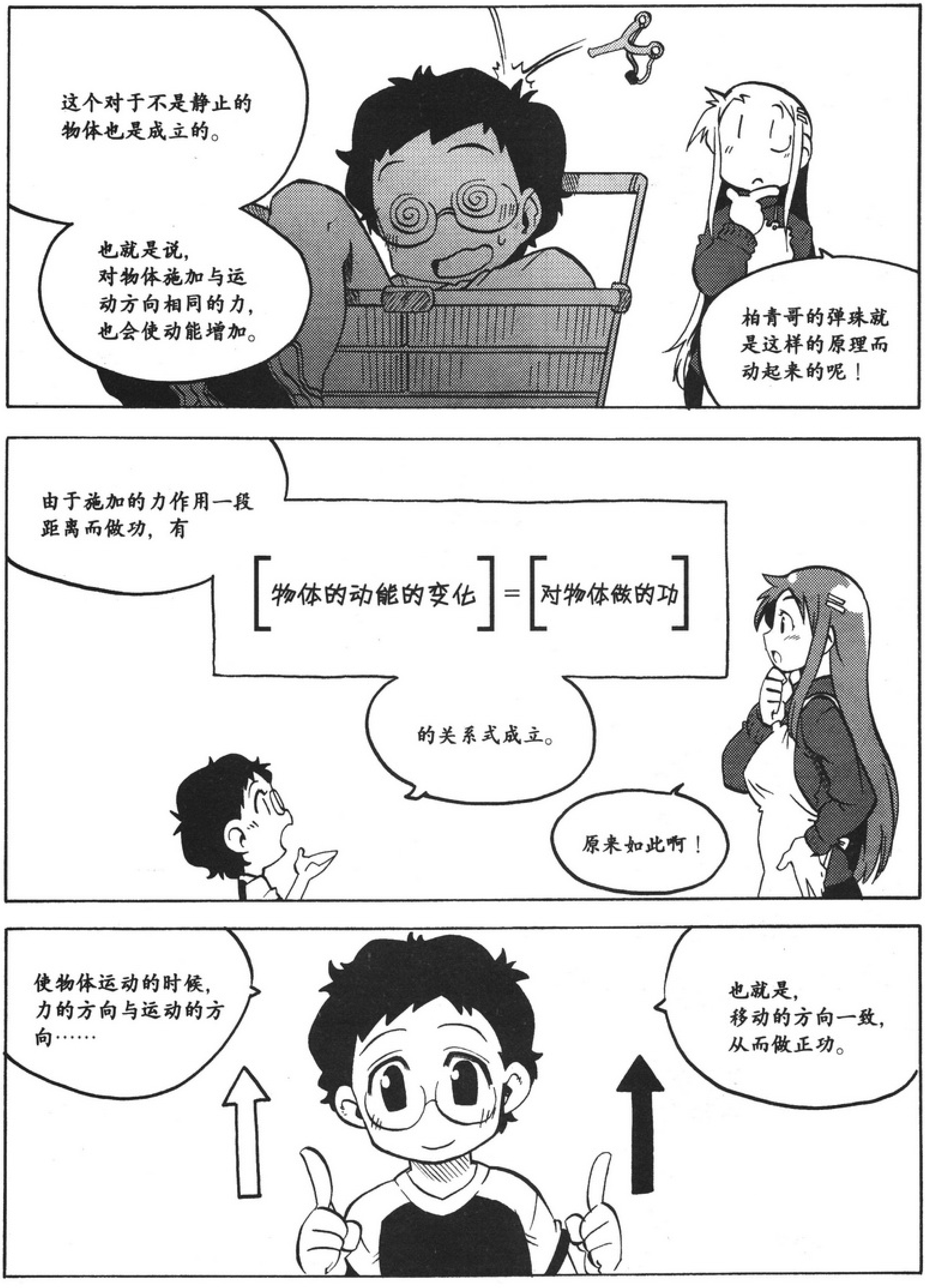
由于物体往下运动的时候做负功，所以势能就减少那么多。



这种情况，与物体最初所处的高度无关。也就是说，不管最初的高度为多少，以最初的高度为参考基准来研究就可以了。



做功与能量
噴？
身体怎么变小了呢……
做功并不只是使势能增加或减少，
也可以让物体的动能发生增减变化。
我长大了哟……
はっ！
使物体运动、使物体停止下来都会做功。
哇……好可爱……♡
等一下……！二宫同学！?
呵呵，继续继续！
那……
呵呵……
对静止的物体施加某个力，持续作用一段距离，物体的动能会增加。
力
施加力使物体移动
产生动能
嗨

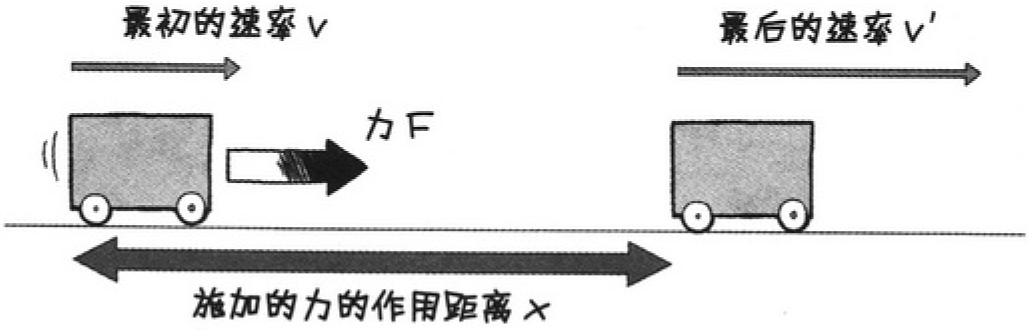

这个对于不是静止的物体也是成立的。
也就是说，对物体施加与运动方向相同的力，也会使动能增加。
柏青哥的弹珠就是这样的原理而动起来的呢！
由于施加的力作用一段距离而做功，有
[物体的动能的变化]=[对物体做的功]
的关系式成立。
原来如此啊！
使物体运动的时候，力的方向与运动的方向……
也就是，移动的方向一致，从而做正功。


因此，
动能的变化也是正的，
动能增加。
妈妈，给我买糖！！
反过来，
对运动的物体施加反方向的力，
阻止物体运动，
动能减少。
这个时候，移动方向与力的方向相反，因此做功的符号为负。
因此物体的动能的变化也是负的……也就是动能减少了。
终于恢复了
唉
呵呵——

实验室

做功与动能的关系式

来推导一下看看做功与动能的关系式是怎样的吧。质量为 m 的物体以速率 v 做匀速直线运动，受到沿行进方向的力 F 的作用，作用距离为 x。



对运动的物体施加力的作用呢！

这时，对物体做的功＝ Fx

做功以后物体的速度用 v' 表示，那么：

$$动能的变化 = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

由于：

物体动能的变化＝对物体做的功

那么关系式为：

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = Fx$$

原来如此……



这个关系式，可以用如下公式推导出来。由于 F 为一定值，做功的时候物体的运动为匀加速运动。因此，物体的加速度用 a 表示，匀加速运动的公式为：

$$v'^2 - v^2 = 2ax$$

（参照第 87 页的式（3））。将运动方程式代入这个公式：

$$ma=F$$

得到：

$$v'^2 - v^2 = 2\frac{F}{m}x$$

两边同时乘以$\frac{1}{2}m$，得到：

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = Fx$$



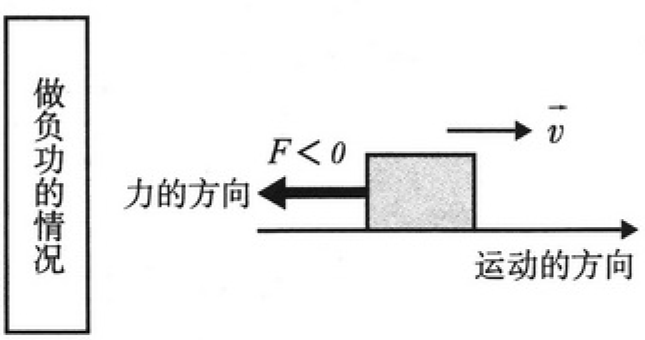
冷静下来进行计算就没有问题呢！

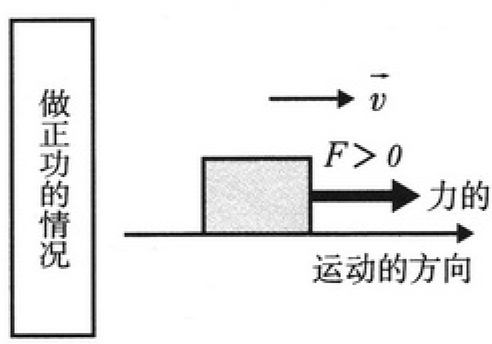


而且，运动方向与力的方向一致的时候，$F > 0$，所以 $Fx > 0$，对物体做的功为正的（x 表示距离，通常为正）。这时：

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 > 0，也就是\frac{1}{2}mv'^2 > \frac{1}{2}mv^2$$

动能增加。相反，运动方向与力的方向相反的时候，$F < 0$，所以 $Fx < 0$，对物体做的功为负的，那么物体的动能减少了。





刹车距离与速度


根据“动能＝做的功”关系式，来看看关于刹车距离的知识吧。
刹车距离？


自行车、汽车上都有刹车，刹车距离就是指从踩刹车时开始，
到停下来的距离，例如……


根据做功与动能的关系有下面这个式子成立：
1/2 × 质量 × 速率 × 速率 = 刹车的力 × 刹车的距离


将这个公式变形一下，
就变成下面这个样子了：
剎车距离＝质量×速率×速率 / 2×剎车的力
根据这个公式，车子的
质量和速率越大，
剎车距离也就越长，剎
车的力越大，那么剎车
距离就越短。
速率乘了两次
啊？
这表示剎车距离与速率的
二次方成正比。
剎车距离
速率
剎车距离与
速率的二次
方成正比
如果最初，
剎车前的速率变成2
倍的话……
剎车距离就会变成原
来的4倍呢？



对，
如果认为速率与刹车距离成比例，那就危险了！
是呢！
速率成倍增加的时候，刹车距离会随速率增加的倍数的平方倍而增加。
自行车由于速率不快，所以差别不大，而汽车就会出现大问题了！
例如，时速为 40km 运动的汽车的刹车距离为 10m，这个汽车的速度达到时速 120km 时，也就是增加到原来的 3 倍，刹车距离会是多少呢？
40km/h
120km/h
Brake!
10m
90m
呃，
速率变成原来的 3 倍，刹车距离就会变成 3×3=9 倍，那么就是 10m×9=90m。


如果将刹车距离与速度的关系错认为成正比的话，会怎么样呢？
ブロロロロロ
司机
差不多该踩刹车了！
现在还不用呢！
会认为刹车距离变成 3 倍……也就是变成 30m，与实际刹车距离相比，有 60m 的误差呢！
啊—
原以为会停下来，而实际没有停下来而发生碰撞……说不定会引起交通事故呢！
因此，在考驾照的时候，肯定会教刹车距离与速度的二次方成正比。
原来是这样啊！

2. 机械能守恒定律

能量的转换




起跳后离开地面，
随着高度增加，
动能减少，
到达最高点的瞬间，
动能变为0。
上升的时候，动能不断的转换为势能，在最高点时，势能达到最大值，
也就是说，
动能转换成了势能。
过了最高点，势能会转换为动能，到达垫子着地时，由于动能，将会对垫子做功。


动能转换为重力势能以外的势能。
这次是什么？
正好我有好东西，来做一下实验吧。
啊！
有了！
嗨，请看。
呃？给我？
按这里的按钮，把盒子打开看看吧。
怦怦
嗯，这个呢。
カチッ
びよーん
カパ

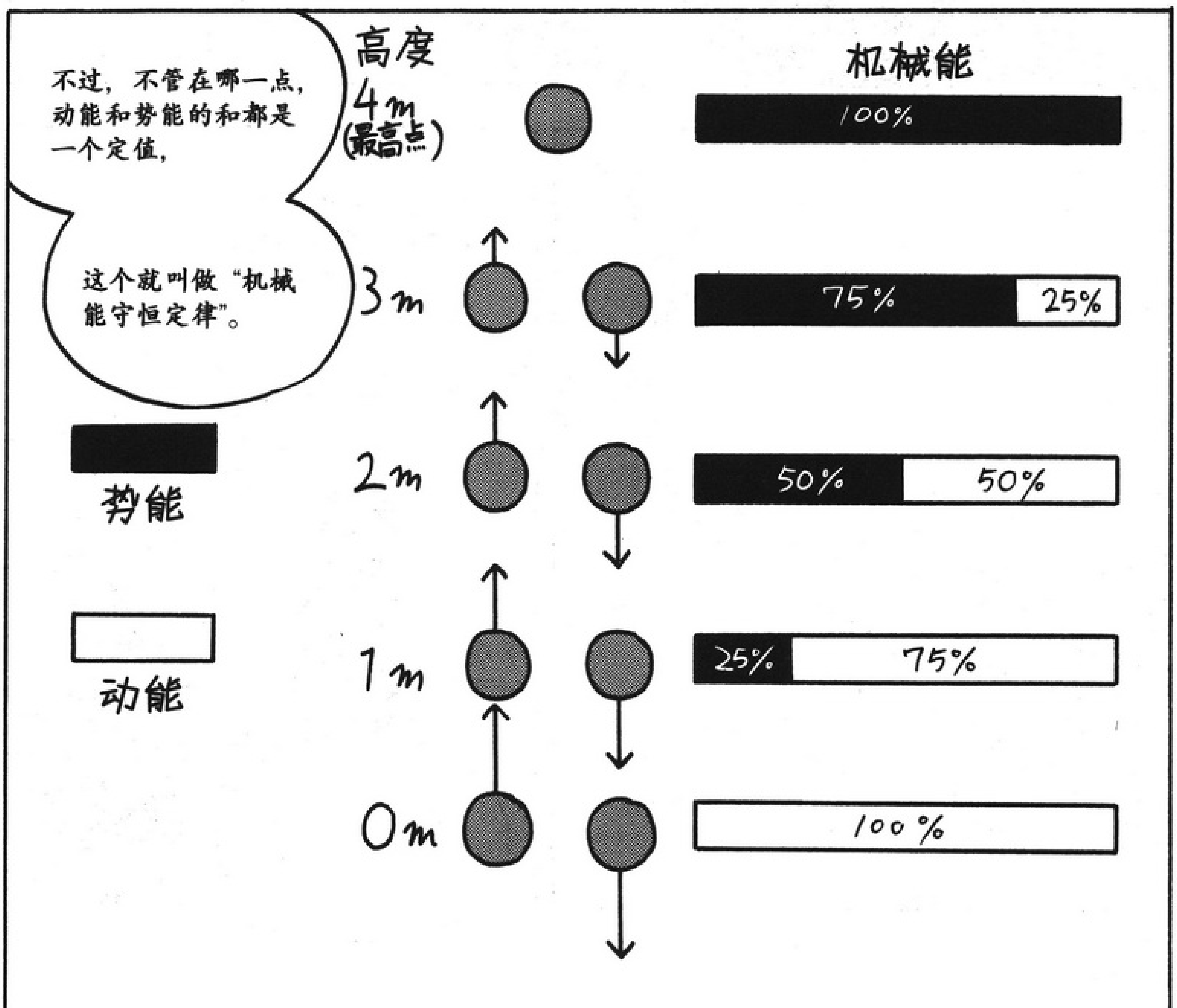


这个小虫子的玩具里面有弹簧。
吧唧吧唧
ひょい
有弹性势能
速度
弹性势能转换为动能
由于在盒子里面是处于压缩状态，因此弹簧有弹性势能。
当打开盖子的时候，弹性势能就转换为动能了。
结果，玩具就会飞出来！
机械能守恒
不过……
这么活跃的二宫同学居然？


我没有想到你居然
连这种虫子都怕。
对不起……
那个，
下面，
你是要讲动能与势能
的转化的知识呢……
……
不要再玩这种奇怪的
恶作剧了！
当、当然，
绝对不会了！
那样的话就原谅你
了，接着说？
跳高的例子与身体的
运动有关，理解起来
有点困难。
嗨
因此，
就简单的用投球的
例子来研究吧。


将球竖直向上投出去，球越高，势能越大，
球的动能越来越小。
与跳高的例子是一样的。


那么在最高点，动能全部转换为势能，
往下落的时候是势能转换为动能。


不过，不管在哪一点，动能和势能的和都是一个定值，
这个就叫做“机械能守恒定律”。
高度
机械能
4m（最高点）
100%
3m
75%
25%
2m
50%
50%
1m
25%
75%
0m
100%
势能
动能



ひゅ～
オーライ オーライ
不过，“机械能守恒定律”成立是以忽略空气阻力为前提的。
啊，这样啊，
如果有阻力和摩擦的话，它们也会消耗能量呢！
果然！
すこーん
考虑空气，球与空气分子碰撞，能量会转移给空气，能量就会减少了。
即使在这种情况下，如果考虑分子层面的微能量，能量守恒定律还是成立的。
很了不起的定律呢！

实验室

机械能守恒定律的表达式



在把球竖直往上投出去的例子中，我们来写出机械能守恒定律成立的表达式吧。
首先，动能的变化与做功的关系式为：



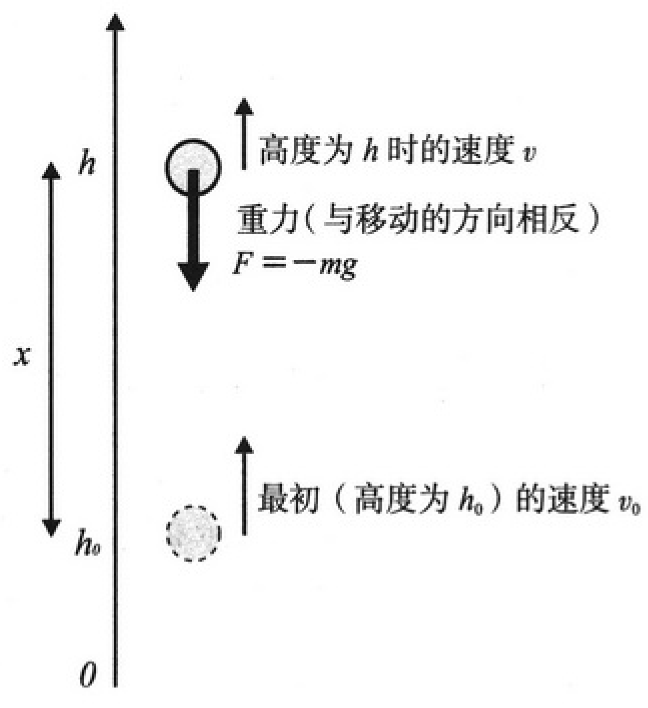
$$\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv^2=Fx$$



在之前的“实验室 做功与动能的关系式”中证明了呢！



现在，做的功 Fx 等于重力所做的功。将球以速度 v_0 往上投出去，起始点的高度为 h_0。投出去后离起始高度为 h 的地方的速度用 v 表示。这时，力作用的距离 x 等于球运动的高度差 $h-h_0$。





这个可以用$\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv^2=Fx$来考虑。将 v' 换成 v，v 换成 v_0。



对。重力与高度增加的方向相反，因此做功为负。

$$F = -mg$$

所以，重力做的功为：

$$Fx = -mg\ (h - h_0)$$

将这个公式代入最初的公式中得到：

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(h - h_0)$$

变换一下得到：

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$



这个就是机械能守恒定律的表达式？



对！来用文字解释一下这个表达式吧。

$\frac{1}{2}mv^2$ = 高度为 h 时的动能
mgh= 高度为 h 时的势能

所以，表达式的左边表示的是高度为 h 时的机械能。



同样这么考虑，表达式的右边表示高度为 h_0 时的机械能呢。



就是这样的。高度为 h_0 时的机械能是往上投的时候的机械能，所以上面推导的表达式也表示了这样的关系：

高度为 h 时的机械能 = 投出去时的机械能



原来如此啊……



也就是说，投出去的球的机械能，不管高度为多少，总是等于最初的机械能。这个就是机械能守恒定律。采用机械能守恒定律，可以求出为了使球达到某一高度而投出去时所需要的速度。在最高点，球的动能为 0，所以：

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$

也就是有：

$$mg(h - h_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

成立。



啊，球最初的动能全部转换成势能了呢！



对！如果使球到达某一个高度，需要知道所需要的速率 v_0 的话，这个公式可以变形为：

$$v_0^2=2g(h-h_0)$$

用这个公式就可以求出速度 v_0。



将具体的数字代入到这个公式中，就可以求出使球上升到某一高度所需要的速率了呢！

求向上投出去的球的速率和高度

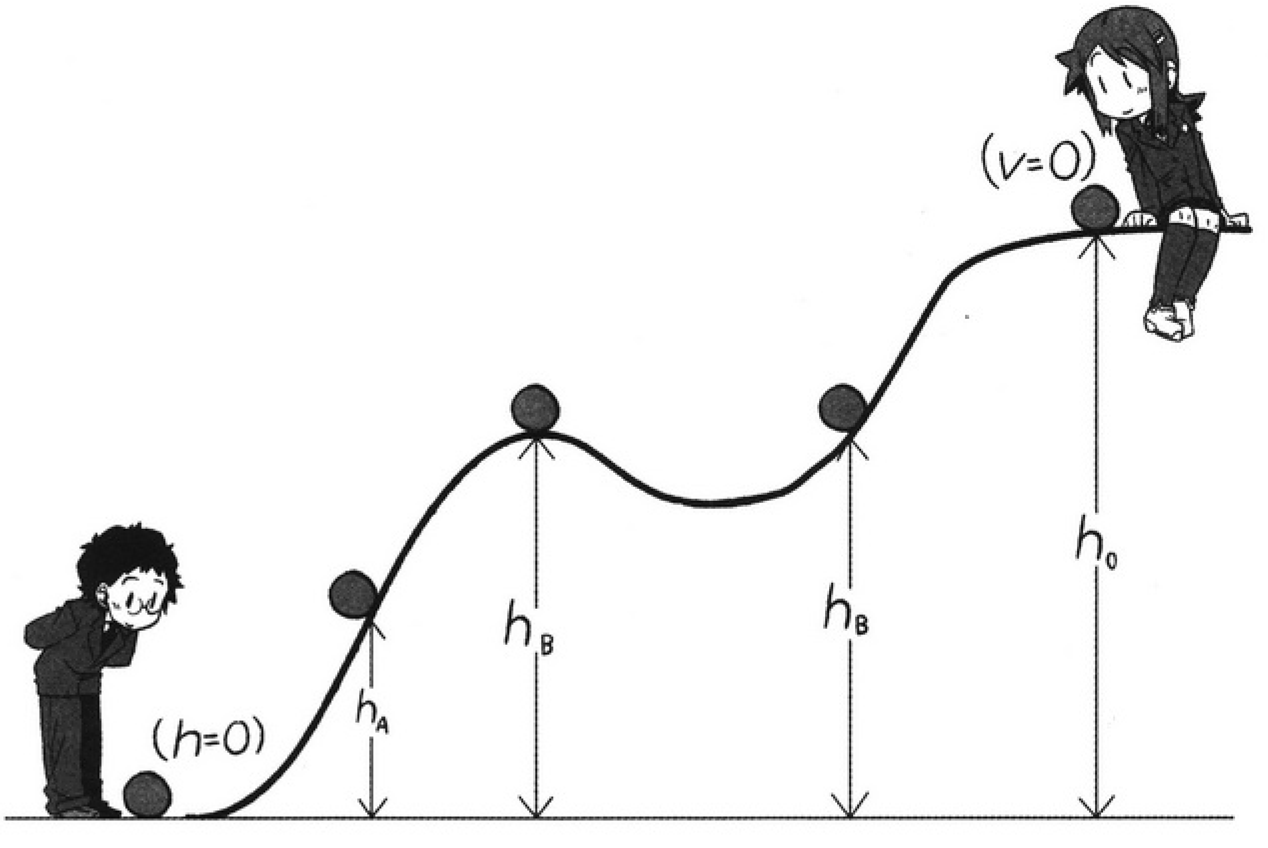


实验室

斜面上的机械能守恒定律

机械能守恒定律，不局限于竖直往上投的情况吧，在其他情况下也是成立的吧？例如，在斜坡上运动的球是怎样的呢？

那么，来看看球从高度为 h_0 到高度为 0 的运动情况吧。在运动过程中，在高度 h_A 处的速率用 v_A 表示，在高度 h_B 处的速率用 v_B 表示。



球开始滚的时候速率 $v = 0$，因此最初球的机械能只有势能。这个机械能用 E 表示，质量为 m 的球在高度 h 处的势能为 mgh，因此：

$$E = mgh_0$$

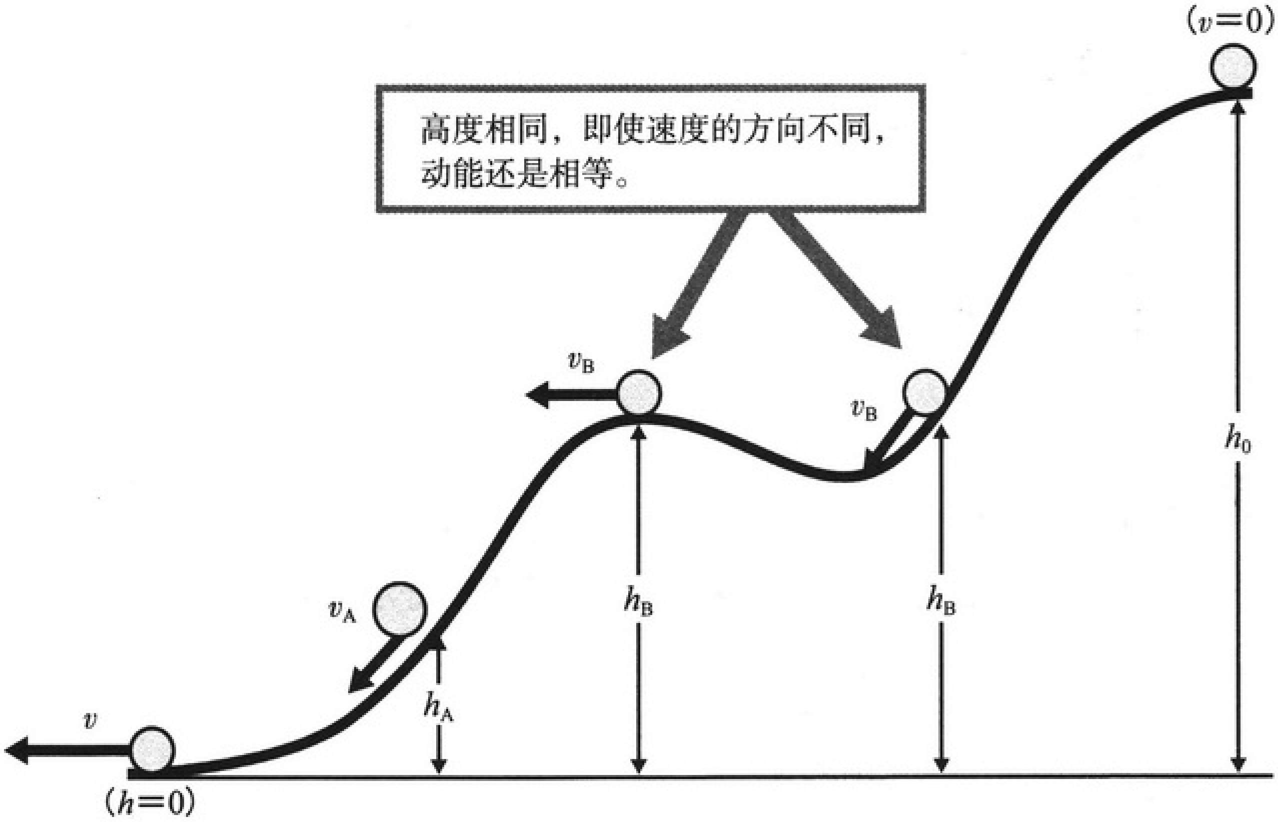
那么，滚下来的时候，也就是 $h=0$ 时速度用 v 表示，这时的能量 E 要如何表示呢？请回忆一下将球投出去的例子。

之前的例子中，球在最高点的时候，动能全部转换为势能……那么，$E=\frac{1}{2}mv^2$？

对！在运动过程中的机械能量也是，没有增加也没有减少，动能和势能的和总是等于 E。也就是：

$$\frac{1}{2}mv_A{}^2+mgh_A=\frac{1}{2}mv_B{}^2+mgh_B=E$$

特别是，如图中两个地点的高度相同，所以势能也相同，即使速度的方向不同，但是动能还是相等的。





动能，与速度的方向没有关系呢！



嗯！动能只有大小。势能也只由高度来决定。



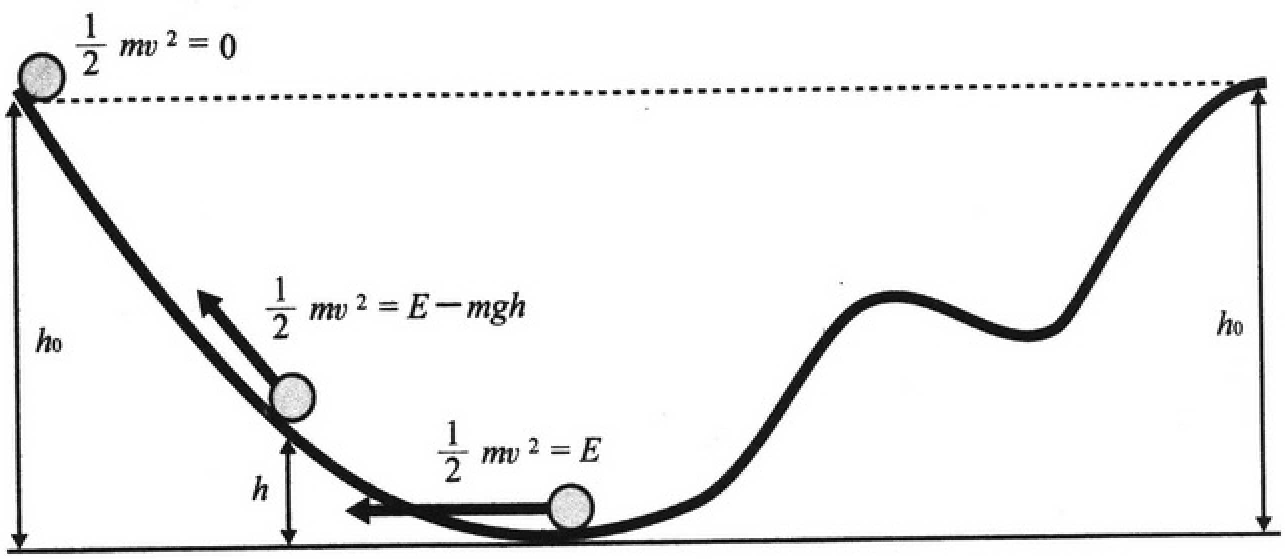
如果后面还有道路的话，球又能回到原来的高度么？



应该可以的。当然，这都是以忽略摩擦和空气阻力为前提的。再次上升途中的高度用 h 表示，这时的动能，根据机械能量守恒定律可以表示为：

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - mgh$$

在上升的过程中，动能在减小，上升到高度为 h_0 的时候，$\frac{1}{2}mv^2 = E - mgh_0 = 0$，这时动能消失了。球无法再上升了。如果继续使它自由运动的话，它会沿着原来的路滚下去。




看了刚才的斜面的图……想去坐过山车了呢！
啊……
你这么一说，
游乐园可是物理定律的宝库啊！
呃？
……所有都跟物理有关呢……
啊，不是，
我的话不是这个意思。
这样，
力学的基本知识都讲完了！
到此为止都辛苦你了！
我才是要谢谢你呢！
多亏了你，
才能明白一些物理知识！
二宫同学变得多少有点喜欢物理的话，
……
我也很高兴啊！



对了！
这次与早矢香
的比赛，
你能过来看吗？
对……
对不起！
那天是物理学会的
高中生会议……
啊……
怦怦
这样啊……
好遗憾呢，
本来是想让你看看
我能赢早矢香的，
哈哈……
……
还好，
我们从现在开始相
互都加油吧！！

后续

能量的单位

能量的单位，可以根据动能的定义来确定：

$$动能 = \frac{1}{2} \times 质量 \times (速率)^2$$

根据上式，

$$能量的单位 = 质量的单位\ 速率的单位 \times 速率的单位$$
$$=(kg)\cdot(m/s)\cdot(m/s)=(kg\cdot m^2/s^2)$$

确定能量的单位。（由于$\frac{1}{2}$没有单位，所以在确定单位的时候可以省略）

由于能量是经常出现的物理量，所以给它定义一个专用单位 (J)（焦耳）。

$$1(J)=1(kg\cdot m^2/s^2)$$

另外，根据 p176 中学习的“动能的变化＝对物体做的功”的关系，可以得到：

能量的单位＝功的单位

有，

功的单位 = 力的单位 × 距离的单位 $=(N)\cdot(m)=(N\cdot m)$

这个 $(N\cdot m)$ 单位与 $(kg\cdot m^2/s^2)$ 看着不一样，但是如果用 $(N)=(kg\cdot m/s^2)$：

$$(N\cdot m)=(kg\cdot m/s^2\cdot m)=(kg\cdot m^2/s^2)=(J)$$

这就证明了它们是相同的单位。

1J 的能量有多少，用 $1(J)=1(N\cdot m)$ 来表示就容易理解了。也就是：

[1J 的能量是，对物体持续 1N 的力，使物体运动 1m 所做的功而产生的能量]

而且，由于质量为 1kg 的物体受的重力为 9.8N，那么刚好受 1N 的重力的物体的质量为 $1/9.8(kg)\approx 0.102(kg)=102(g)$。p161 中良田说的“1J 等于将 102g 的物体竖直向上提升 1m 做的功”，就是这么来的。

能量的单位，除了焦耳外，还有炉灶之类的与热相关的机器或食品用的单位卡路里 (cal)。1cal 等于在一个大气压下，将 1g 水的温度提高 1℃所需要热能。与焦耳的关系是：

$$1(\text{cal})\approx 4.2(\text{J})$$

还有，在食品中使用的是 (kcal)（千卡路里）这个单位。1kcal = 1000cal。

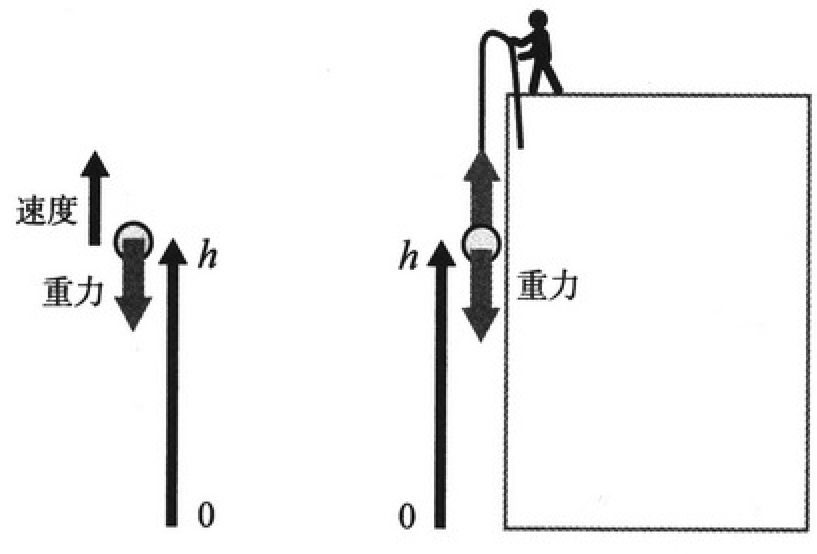
顺便说一下，50g 冰淇淋含的能量大约为 100kcal。将它换算为焦耳单位来看看吧。

$$100(\text{kcal})=100\ 000(\text{cal})=4.2\times 100\ 000(\text{J})=420\ 000(\text{J})$$

这个能量的大小大概是个什么概念呢？将 1kg 的物体提高 1m 所需做的功约为 10J，那么这个能量相当于将 10^6kg = 1000t 的物体提升 1m 所需做的功。我们为了生存，每天必须摄取大量的能量呢！

提升力做功与重力做功的区别

竖直往上投出去的物体只受到重力的作用，那么对物体做功的力只有重力。而对物体施加力的作用将物体竖直往上提升的时候，物体受到拉力和重力两个力的作用，它们分别对物体做功。来仔细研究这个“往上投”与“拉着往上升”不同情况的做功的区别吧。



首先，来研究“往上投”的做功的情况吧。将质量为 m 的物体竖直往上投出去，上升高度 h，重力对物体做的功为，（重力的方向与物体的运动方向相反，所以重力表示成 $-mg$）

$$\text{做的功} = -mgh \qquad (1)$$

这个功 $-mgh$，根据关系式：

物体的动能变化＝对物体做的功

使物体的动能发生变化。在这里，刚投出去时物体的速率为 v_0，高度为 h 时的速率用 v 表示，因此：

$$动能的变化 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

将上面三个式子组合起来得到：

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh$$

即

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$$

根据这个公式，可以知道，“往上投”的情况下，重力做的功，使重力势能增加了。

接下来，看看“拉着往上升”的情况。在此，以一定的速度缓慢的将物体往上拉。此时，根据运动的第一定律，物体受的合力为 0，也就是，物体受的力的和为 0，（矢量表示的）拉力和重力的关系为：

拉力＋重力＝ 0

因此有：

拉力＝－重力＝ mg

那么

拉力对物体做的功＝ mgh

当然，

拉力对物体做的功＋重力对物体做的功＝ 0

成立。（请与式（1）进行比较）。“拉着往上升”的情况下，有：

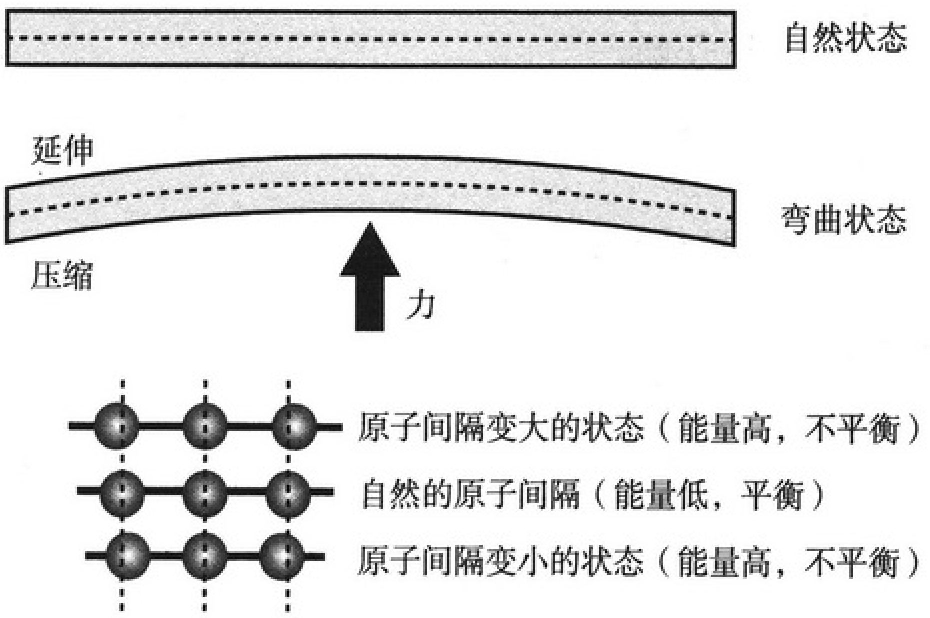
动能的变化＝ 0

因此，合力没有做功。拉力对物体做的功变成了物体的重力势能 mgh。

势 能

动能是物体所持有的能量。而相对的，势能（位置能量），不是物体所持有的能量，而是随空间变化储存的能量。典型的势能是受万有引力作用的重力势能、电的吸引力和排斥力的静电场的势能。

弹簧和橡胶的弹性势能也是倍受关注的一种势能，不过弹簧和橡胶它们的弹性势能是由于复原力的原因产生的，原理不一样。通常弹簧的复原力是，发生伸缩的弹簧的原子间隔（由原子间的静电场的势能决定）的平衡状态遭到破坏，为了回到原来的位置而产生的。实际的线圈型弹簧是，下图的直的金属棒产生微小的弯曲变形，根据线圈形状的卷曲程度而使其产生大变形而做成的。



橡胶的弹性是，高分子原本杂乱的堆在一起，由于拉伸使分子排列整齐，杂乱程度变小的，为了回到原来的杂乱程度而产生的※。

※ 这里的杂乱程度在物理学上称为“熵”。一般来说，即使能量不变，熵值也有可能变大。比如说，将一滴墨水滴在水中，墨水就开始与水混合。与水均匀混合以后的墨水，其熵值要比原来没有滴入水中时的熵值大。



往上投的速率和高度

第 194 页中，对于田惠的问题“以时速为 100km 投出去的球的上升高度为多少？”良田的回答是 39m。来证明一下吧。

根据 $v_0^2=2gh$ 有：$h=\frac{v_0^2}{2g}$

由于时速 100km ＝ 100=1000/3600(m/s)，那么：

$$h=\frac{(1000/36)^2}{2\times 9.8}\approx 39.4(\text{m})$$

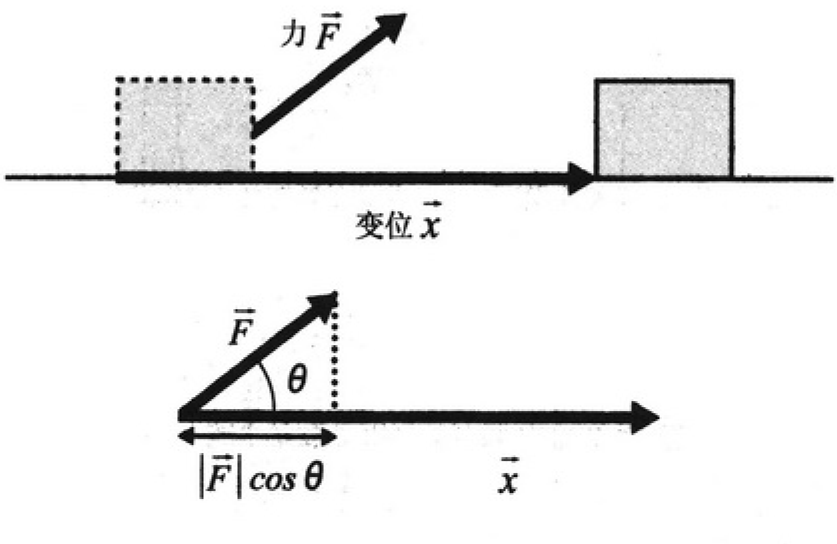
提 高

力的方向与做功

做功是用力和物体的位移表示的，力$\overrightarrow{F}$和位移$\overrightarrow{x}$都是矢量。当力的方向与位移的方向不一致的时候，做功 W 的表达式如下所示：

$$W = |\overrightarrow{F}||\overrightarrow{x}|\cos\theta$$

在此，$|\overrightarrow{x}|$为物体的移动距离，$|\overrightarrow{F}|\cos\theta$是物体受的力在移动方向上的分力。



$|\overrightarrow{F}||\overrightarrow{x}|\cos\theta$等于 2 个矢量$\overrightarrow{x}$和$\overrightarrow{F}$的内积$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{x}$，因此功可以表示为※：

$$W = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{x}$$

p179 页中考虑的是特殊情况，力的方向与位移的方向一致，有：

$$W = |\overrightarrow{F}||\overrightarrow{x}|$$

※ 这里出现了内积觉得很奇怪吧。功和能量都是标量。而力与位移都是矢量。因此，力与位移两个矢量与功这个标量联系在一起的时候，需要有从矢量变换到标量的运算。矢量的内积就是这种运算。

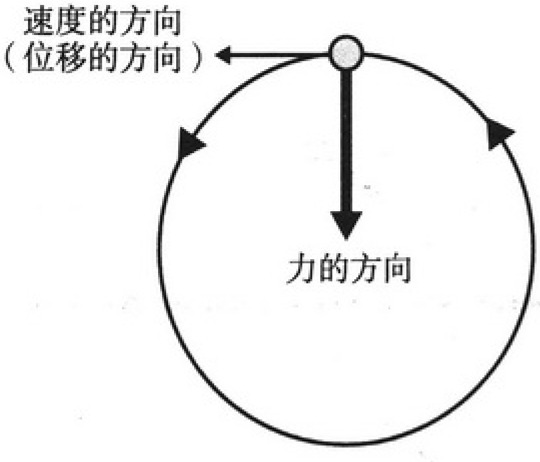
也就是：

做功＝力的大小 × 移动的距离

做正功。这时，被做功的物体的动能增加。而当力的方向与位移的方向相反的时候，由于 $\cos\pi=-1$，所以：

$$W=-|\vec{F}||\vec{x}|$$

做负功，这时，被做功的物体的动能减少。还有，当力的方向与位移的方向垂直的时候，由于 $\cos(\pi/2)=0$，所以 $W=0$，不做功。力的方向与位移的方向垂直的典型情况是匀速圆周运动。匀速圆周运动中，有指向圆心的力（向心力）作用，由于做功为 0 所以动能不变。因此，速率保持一个定值而做圆周运动。



力不是定值情况下的做功（一维空间）

力是定值的情况下，做功的定义是"做功＝物体的移动距离 × 力在移动方向上的分力"。不过在实际情况中，物体受的力其实不是一个定值。这个时候，就将力做的功分成许多很小的区间来考虑。至于区间有多小，需要在这个小区间里力可以近似一个定值。小区间用 Δx 表示，在这个区间里作用的力用 F 表示，动能的变化与 p178 页中的公式相同：

$$\frac{1}{2}mv_{i+1}^2-\frac{1}{2}mv_i^2=F_i\Delta x \quad (1)$$

区间 $x-x_0$，可以分成 N 个微小的区间 Δx，在 Δx 里，力近似为一定值。在 $0<i<N-1$ 中对应不同的 i，式 (1) 都是成立的。将这 N 个公式都相加得到：

$$
\begin{aligned}
&(\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2)+(\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2)+(\frac{1}{2}mv_3^2-\frac{1}{2}mv_2^2)+\cdots \\
&=F_0\Delta x+F_1\Delta x+F_2\Delta x+\cdots
\end{aligned} \quad (2)
$$

左边消去可以相互抵消的项，剩下：

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

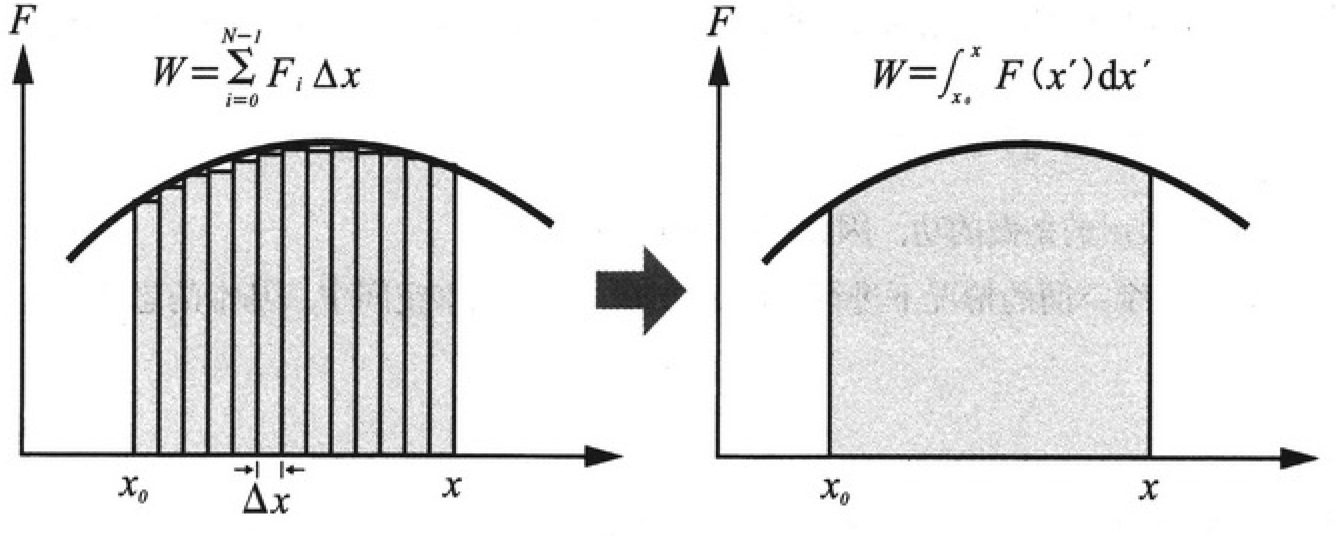
不过在这里用了 $v_{N-1}=v$。因此，式（2）可以表示为：

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\sum_{i=0}^{N-1}F_i\Delta x$$

也就是说，当力不是一个定值的时候，动能的变化还是等于整个区间内物体被做的功。而且，微小区间越细化，那么在这个微小区间内力近似为一个定值的精度就越高。那么，当微小区间看成无限小的极限时（这时 N 为无限大），功 W 为：

$$
\begin{aligned}
W&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(N\to\infty)}}\sum_{i=0}^{N-1}F_i\Delta x \\
&=\int_{x_0}^{x}F(x')\mathrm{d}x'
\end{aligned}
$$

表示成这样的积分形式，在数学上是比较严谨的表示方法。在此，物体受的力随位置 x 发生变化，用 $F(x)$ 表示。积分的研究方法是将无限细化的区间的值相加起来。



结果，做功用：

$$W=\int_{x_0}^{x}F(x')\mathrm{d}x' \quad (3)$$

表示，那么“某个物体在两点之间的动能的变化等于在这个区间里物体被做的功”可以表示为：

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=W \tag{4}$$

还有，也可以直接从运动方程式推导出做功与动能的关系。

运动方程式：

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F$$

在公式的两边同时乘以速度 v，然后对它从 0 到 t 进行积分：

$$\int_0^t mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^t Fv\mathrm{d}t$$

这个等式的左边可以用：

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t}=2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

右边可以用 $v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}mv^2)\mathrm{d}t=\int_0^t F(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t$$

即

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)=\int_{x_0}^{x}F\mathrm{d}x \tag{5}$$

在此，时刻 $t=0$ 和 t 时的位置和速度分别用 x_0、v_0 和 x、v 表示。式（5）的左边是动能的变化：

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

式（5）的右边表示的是做的功，因此可以推导出式（4）。

以上是在一维空间的情况下进行的简单分析，换到三维空间中，基本的思考方法也是相同的。

守恒力与能量守恒定律

在高度为 x 的地方的重力势能可以用 mgx 表示。对它加上负号然后微分：

$$-\frac{\mathrm{d}(mgx)}{\mathrm{d}x}=-mg$$

右边表示的是重力。在此：

$$V=mgx \text{ 和 } F=-mg$$

那么有这样的关系成立：

$$F=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{6}$$

这并不局限于重力，像式（6）根据势能表示的力叫做守恒力。为什么这么说，那是因为它是根据能量守恒定律成立而定义的。

实际上，将式（6）代入做功的公式（3）：

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x'}\mathrm{d}x' = -\int_{V(x_0)}^{V(x)}\mathrm{d}V \\ &= -[V(x)-V(x_0)] \end{aligned} \tag{7}$$

将这个公式代入动能的变化与做功的关系式（4）中：

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-[V(x)-V(x_0)]$$

那么能量守恒定律：

$$\frac{1}{2}mv^2+V(x)=\frac{1}{2}mv_0^2+V(x_0)$$

弹簧的势能与力

再来看一个守恒力的例子——弹簧的复原力吧。弹性常数 k 的弹簧在自然长度的基础上被拉伸（压缩）x 时，弹簧的弹性势能如下面的表达式所示：

$$V=\frac{1}{2}kx^2$$

这个弹性能量可以看作是弹簧的势能。这时，加上连在弹簧上的质量为 m 的物体，有能量守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{定值}$$

成立。而且，在这个弹性势能的情况下，物体受的力为：

$$F=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)=-kx$$

这个就是弹簧的复原力的表达式。

当然，复原力 $F=-kx$ 对弹簧从自然状态到伸长 x 时做的功的计算为：

$$W = \int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = k[\frac{1}{2}x'^2]_0^x = \frac{1}{2}kx^2$$

与势能相等。这个用式（7）来考虑就是理所当然的了。

非守恒力与能量守恒定律

不能用势能表示的力就叫做非守恒力。摩擦力就是典型的非守恒力。有非守恒力作用的场合，物体的动能和势能的和为定值这个简单的能量守恒定律就不再成立了。实际上，在有摩擦的桌子上滑动的物体，滑动一段距离后会停止下来。这表示，最初的动能都消耗完了。不过，也不能说“能量守恒定律就不成立了”。物体的动能转换热能的形式※，微分子的运动发生了变化，能量的总量还是没有变化。

像第 190 页良田说的那样，如果考虑微分子的运动，即使在有摩擦力这样的非守恒力作用的情况下，能量守恒定律也是成立的。

不过，在考虑分子能的时候，有一个必须注意的地方。那就是，分子范畴的分析一般需要用到量子力学。也就是说，本书中介绍的牛顿的运动定律不能用于微观世界的分析。还有，在研究原子能的时候，是以相对论的能量分析和核反应分析的高等物理为基础的，因此力学层面的分析变得很复杂。但是，即使扩大到量子力学和相对论，能量守恒定律还是成立的。物理学家说，能量守恒定律是自然界最值得信赖的基本定律。

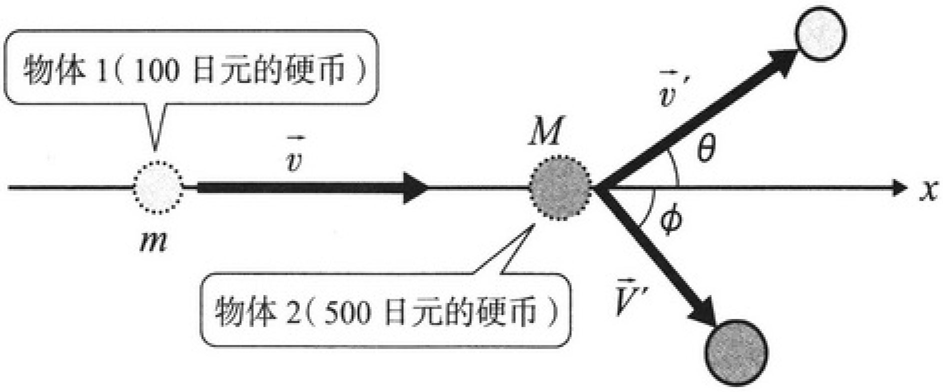
能量守恒定律与硬币碰撞的问题

第 3 章中，分析了硬币碰撞和二元的动量守恒定律（参见第 146 页）。学习了分两个方向来表示动量守恒定律：

x 方向上：$mv=mv'\cos\theta+MV'\cos\phi$

y 方向上：$0=mv'\sin\theta-MV'\sin\phi$

※“热能”的说法其实是不正确的。热是能量传递中的过程量，与物体、空间中的保有能量不同，就像不能把“功”称为“做功”一样。



而且，两个物体碰撞的时候，如果能量守恒（称为完全弹性碰撞），有：

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$$

成立。这三个公式里有 4 个未知数：v'、V'、θ、ϕ，所以无法求出结果，不过可以求出两个量之间的关系式。例如，可以求碰撞后物体 1 的速率 v' 与角度 θ 的关系。简化问题，假定 $m < M$（100 日元的硬币与 500 日元的硬币碰撞时满足这个条件）。首先，将动量守恒定律的 2 个公式变换成表达 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$ 的形式，然后代入 $\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$ 中，从而消去了 ϕ。
那么，得到：

$$V'^2 = (\frac{m}{M})^2(v^2 - 2vv'\cos\theta + v'^2)$$ ※1

将这个等式代入能量守恒定律的公式计算得到：

$$V' = \frac{(m/M)\cos\theta + \sqrt{1-(m/M)^2\sin^2\theta}}{1+m/M} \quad (8)$$

顺便说一下，这个公式当 $\theta=0$ 的时候，$v=v'$。这个情况对应于物体 1 没有与物体 2 碰撞，直接往前运动的情况。

而物体 1 被弹回来的情况，也就是 $\theta=\pi$，有：

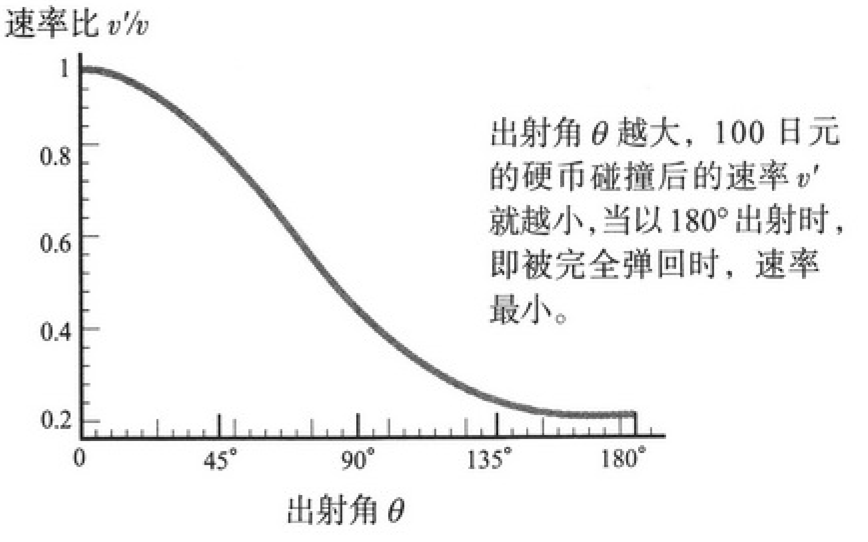
$$V' = \frac{1-m/M}{1+m/M}v$$

当 $M \gg m$ 的时候，这个公式可以近似为 $v' \fallingdotseq v$ ※2。这表示，质量很小的物体正面碰撞质量很大的物体时，将以相同的速率被弹回来。另一种情况，当 $M = m$ 时，$v'=0$，这时，将 500 日元

※1 动量守恒定律 $m\vec{v} = m\vec{v}' + M\vec{V}'$ 用矢量表示，根据矢量的三角形的余弦定律，可以直接推导出来。
※2 直接对公式（8）考虑 $M \gg m$ 的情况，也可以得到 $v' \fallingdotseq v$。

的硬币换成另一个 100 日元的硬币，可以验证 100 日元的硬币的不会斜着出射的正面碰撞问题。碰撞后原来运动的 100 日元的硬币停止运动，而原来静止的 500 日元的硬币以相同的速度开始运动。这时 $V'=v$，可以很简单的从 V'^2 的表达式中得到。

公式（8）给出了 100 日元的硬币碰撞前后的速率比 v'/v 与出射角 θ 的关系，来用图表示这个关系吧。100 日元的硬币的质量为 4.8g，500 日元的硬币的质量为 7.0g，因此 m/M=4.8/7.0=0.69。将这个代入公式（8），计算得到的结果用图形表示出来，如下图所示：




嗨！
不管是多么
强烈的撞击
……
击球之后的速度
力
击球之前的速度
球拍施加的冲量
击球之后的
动量
击球之前的
动量
根据动量与
力量的关系，
就能决定球离开
球拍时的速度！
所以……


呃！
之后的运动
也就决定了
……！
良田的话起作用了！
……这是大家
都知道的！
但是，
良田……
以后，
在比赛中要集中
注意力呢！
没在这里……



不好！
得分！早矢香！
明……
明白了
刚开始……
田惠！
啊……
喂，
要结束了哦，
田惠？


你来了啊！
……
会议结束了，所以就跑过来了。
赶上了……
良田!?
呵呵……谢谢！
田、田惠……集中注意力！加油！
好！
好……接下来是我的发球局。



终于叫我“田惠”了。
干……
干什么啊，
那两个人！
冲量
动量
用力将球打出
去！！！
打出去！！！


见鬼！
动不了……
打得好！
……全靠老师
教得好啊！
！


得分！田惠！
好～！
肯定行……还有一个球。
这次才是真实力。
不行不行，
集中注意力……
去吧!!
ゴクッ
集中注意力!


我记得很清楚呢，
良田。
调整状态……
球拍接触球的时
候用最大的力打
出去！


赢啦!!
比赛结束！
田惠胜！
嗯?
成功了!
我赢了，良田!
啊


……这次的双打的搭档……
田惠是我的了。
啊!?
等一下！
我已、已经决定是田惠了!
……
啊呀呀呀
啊，良田，
这也是吸引力吧？
说不定是呢！
等、等一下，那是什么啊？


喂，
你和我搭
档吧！☆
啊！？
那是谁啊？
我们，
还算认识……

（N-0352.0103）
责任编辑：王 炜 赵丽艳
责任制作：董立颖 魏 谨
封面制作：【铭轩堂设计：13671110894】

用漫画这种形式讲数学、物理和统计学，十分有利于在广大青少年中普及科学知识。

周恩来、邓颖超秘书，周恩来邓颖超纪念馆顾问
中日友好协会理事，《数理天地》顾问，全国政协原副秘书长

用漫画和说故事的形式讲数学，使面貌冷峻的数学变得亲切、生动、有趣，使学习数学变得容易，这对于提高全民的数学水平无疑是功德无量的事。

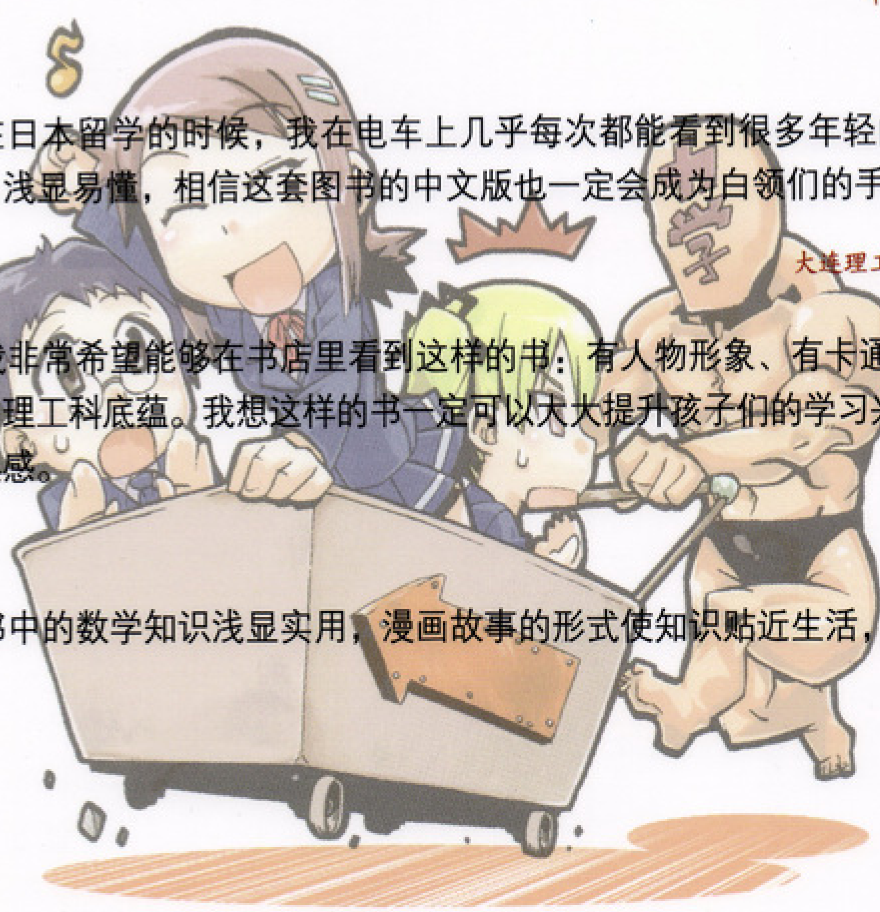
《数理天地》杂志社 社长 总编
“希望杯”全国数学邀请赛组委会 命题委员会主任

用漫画的形式，讲解日常生活中的数学、物理知识，更能让大家感受到数学殿堂的奥妙与乐趣。

《光明日报》 原副总编辑
中华炎黄文化研究会 常务副会长

科学漫画是帮助学习文科的人们用形象思维的方式掌握自然科学的金钥匙。

中国人民大学外语学院日语专业 主任
大学日语教学研究会 会长



在日本留学的时候，我在电车上几乎每次都能看到很多年轻的白领看这套图书，经济实惠、图文并茂、浅显易懂，相信这套图书的中文版也一定会成为白领们的手中爱物。

大连理工大学 能源与动力学院 博士 副教授

我非常希望能够在书店里看到这样的书：有人物形象、有卡通图、有故事情节，当然最重要的还有深厚的理工科底蕴。我想这样的书一定可以大大提升孩子们的学习兴趣，降低他们对于高深的理工科知识的恐惧感。

北京启明星培训学校 校长

书中的数学知识浅显实用，漫画故事的形式使知识贴近生活，概念更容易理解。

北京大学 数学科学学院 博士

上架建议：科普/漫画
ISBN 978-7-03-024952-4
9 787030 249524 >
定价：29.80元

科学出版社 东方科龙
http://www.okbook.com.cn
zhaoliyan@mail.sciencep.com